Chapitre 1

Nombres complexes

Les nombres complexes ont été introduits en Terminale et nous allons rappeler brièvement les définitions et propriétés vues à cette occasion.

1.1 Définitions

Nous admettons l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1 - $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2 - Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$.

3 - Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = x + iy$ avec x et y réels.

4 - $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et obéissent aux mêmes règles de calcul.

Ainsi, on a par exemple : $(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i$, $(2 + 3i)(1 - i) = 5 + i$, $(1 + i)^2 = 2i$

L'ensemble $\mathbb{C}$ ainsi défini est appelé ***ensemble des nombres complexes*** et on note aussi

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

L'écriture $z = x+iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est dite ***forme cartésienne*** du nombre complexe z et l'égalité de deux nombres complexes $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ se traduit par :

$$z = z' \Longleftrightarrow x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow (x, y) = (x', y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Les réels x et y sont appelés respectivement ***partie réelle*** et ***partie imaginaire*** du complexe z et notées :

$$x = \mathrm{Re}(z) \text{ et } y = \mathrm{Im}(z)$$

Les complexes de la forme iy avec y réel sont appelés ***imaginaires purs*** et l'ensemble des complexes imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

1.1.1 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 1.1.1 — *Pour tout $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on appelle* **conjugué** *de z le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$*

Proposition 1.1.1 — *Le conjugué d'une somme (respectivement d'un produit, d'un quotient) est la somme (respectivement le produit, le quotient) des conjugués.*

PREUVE — Pour la somme et le produit, la preuve est évidente et laissée au soin du lecteur. Considérons le cas du quotient :

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} \cdot \overline{z'} = \overline{\left(\frac{1}{z'} \cdot z'\right)} = \overline{1} = 1 \Longrightarrow \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}} \Longrightarrow \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \cdot \frac{1}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

□

Proposition 1.1.2 — *Pour tout nombre complexe z, on a :*

1. $\overline{(\overline{z})} = z$
2. *Re*$(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *et Im*$(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
3. *z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$*
4. *z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$*

PREUVE — Ces résultats découlent directement des définitions.

□

REMARQUE — L'utilisation du conjugué permet d'obtenir la forme cartésienne de l'inverse d'un nombre complexe non nul :

$$\text{Pour } (x, y) \neq (0, 0) \text{ , } \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

1.1.2 Module d'un nombre complexe

Définition 1.1.2 — *Pour tout $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on définit le* ***module*** *de z par :*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

L'application module : $z \longmapsto |z|$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}_+$ prolonge l'application valeur absolue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. En effet si $z \in \mathbb{R}$, $z = x$ on a $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$.

Proposition 1.1.3 — *Pour tout nombre complexe z :*

1. *$z\overline{z}$ est un réel positif et $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$*
2. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
3. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
4. $|$*Re*$(z)| \leqslant |z|$ *et* $|$*Im*$(z)| \leqslant |z|$

Pour tout nombre complexe z non nul :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \text{et} \quad |z| = 1 \Longleftrightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = |z|$$

PREUVE — Ces résultats découlent directement de la définition du module.

□

Proposition 1.1.4 — *Pour tous nombres complexes z et z' :*

$$|zz'| = |z||z'| \quad , \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ si } z' \neq 0 \quad , \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad , \quad ||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$$

PREUVE —

1. $|zz'|^2 = zz'\left(\overline{zz'}\right) = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2 \times |z'|^2 \Longrightarrow |zz'| = |z||z'|$

2. Si $z' \neq 0$:
$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \frac{z}{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z\overline{z}}{z'\overline{z'}} = \frac{|z|^2}{|z'|^2} \Longrightarrow \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$
3. $|z+z'|^2 = (z+z')(\overline{z}+\overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z}$
En posant $Z = z\overline{z'}$ on a :
$$z\overline{z'} + z'\overline{z} = Z + \overline{Z} = 2\mathrm{Re}(Z) \leqslant 2|\mathrm{Re}(Z)| \leqslant 2|Z| = 2|z||z'|$$
D'où :
$$|z+z'|^2 \leqslant |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||z'| = (|z|+|z'|)^2 \Longrightarrow |z+z'| \leqslant |z| + |z'|$$
4. $|z| = |(z-z')+z'| \leqslant |z-z'| + |z'| \Longrightarrow |z| - |z'| \leqslant |z-z'|$
De même : $|z'| - |z| \leqslant |z'-z| = |z-z'|$
D'où :
$$-|z-z'| \leqslant |z| - |z'| \leqslant |z-z'| \Longrightarrow ||z| - |z'|| \leqslant |z-z'|$$

□

1.1.3 Rappels de trigonométrie

Si x, a, b désignent des réels quelconques :

$$\boxed{\sin(\pi - x) = \sin x \ ; \ \cos(\pi - x) = -\cos x \ ; \ \sin(\pi + x) = -\sin x \ ; \ \cos(\pi + x) = -\cos x}$$

$$\boxed{\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \ ; \ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x \ ; \ \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \ ; \ \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x}$$

$$\boxed{\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \ ; \ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

$$\boxed{\sin 2x = 2 \sin x \cos x \ ; \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$\boxed{\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) \ ; \ \cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)}$$

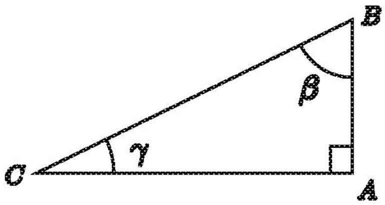
Si $\tan x$ et $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sont définis, on a aussi en posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \ , \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ , \ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}}$$

Ces dernières formules seront démontrées en exercice et on pourra également établir les formules donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$ et $\tan 2x$ en fonction de $\tan x$.

Dans le triangle rectangle en A représenté ci-contre, on a les formules suivantes :

$$\sin\gamma = \frac{AB}{BC} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{AC}{BC} \quad ; \quad \tan\gamma = \frac{AB}{AC}$$
$$\sin\beta = \frac{AC}{BC} \quad ; \quad \cos\beta = \frac{AB}{BC} \quad ; \quad \tan\beta = \frac{AC}{AB}$$



1.1.4 Arguments d'un nombre complexe non nul

Définition 1.1.3 — *Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ appartenant à $\mathbb{C}^*$, on appelle* ***argument*** *de z et on note $Arg(z)$ tout angle θ défini à $2k\pi$ près tel que :*

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Il résulte alors des définitions de module et argument que tout nombre complexe non nul s'écrit :

$$z = |z|\left(\cos Arg(z) + i\sin Arg(z)\right) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Cette écriture est dite ***forme trigonométrique*** de z.

Proposition 1.1.5 —

1. $Arg(z) = 0\ [2\pi] \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$
2. $Arg(z) = \pi\ [2\pi] \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_-^*$
3. $Arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}_+^*$
4. $Arg(\overline{z}) = -Arg(z)\ [2\pi]$
5. $Arg(zz') = Arg(z) + Arg(z')\ [2\pi]$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$, $Arg(z^n) = nArg(z)\ [2\pi]$
6. $Arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -Arg(z)\ [2\pi]$
7. $Arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z')\ [2\pi]$

PREUVE — En notant $\theta = Arg(z)$, $\theta' = Arg(z')$ et $\varphi = Arg(zz')$, on a :

1. $Arg(z) = 0\ [2\pi] \Longleftrightarrow z = |z| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$
2. $Arg(z) = \pi\ [2\pi] \Longleftrightarrow z = -|z| \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_-^*$
3. $Arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \Longleftrightarrow z = i|z| \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}_+^*$
4. $\overline{z} = |z|(\cos\theta - i\sin\theta) = |\overline{z}|\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) \Longrightarrow Arg(\overline{z}) = -\theta\ [2\pi] = -Arg(z)\ [2\pi]$
5.

$$\begin{aligned} zz' &= |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= |z||z'|\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta')\right] + i\left[(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')\right] \\ &= |zz'|[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')] \end{aligned}$$

   D'où :

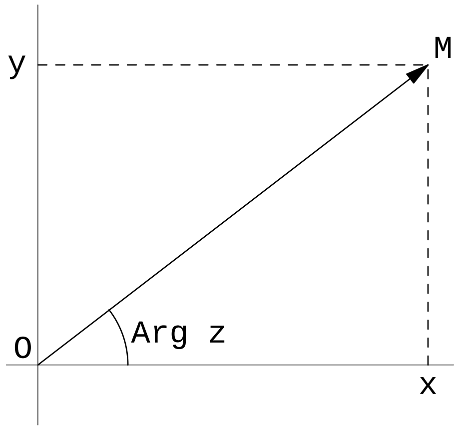
$$Arg(zz') = \theta + \theta'\ [2\pi] = Arg(z) + Arg(z')\ [2\pi]$$

   Et on en déduit immédiatement par récurrence sur n : $Arg(z^n) = nArg(z)\ [2\pi]$

6. $z\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1 \Longrightarrow Arg(z) + Arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0\ [2\pi] \Longrightarrow Arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -Arg(z)\ [2\pi]$
7. $Arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = Arg\left(z \times \dfrac{1}{z'}\right) = Arg(z) - Arg(z')\ [2\pi]$

1.1.5 Plan complexe

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine réel rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. L'application $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P}$ qui à tout complexe $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le point M de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ est une bijection qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est alors appelé ***plan complexe***. Si M et z sont associés par φ, $M = \varphi(z)$ s'appelle ***l'image*** de z et $z = \varphi^{-1}(M)$ s'appelle ***l'affixe de*** M. On note $M(z)$ pour signifier que M est le point de $\mathcal{P}$ d'affixe z.



On a :

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \quad \text{et si} \quad z \neq 0 \text{ , } (\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}) = Arg(z) \; [2\pi]$$

Si on note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé à $\mathcal{P}$ muni de la base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'application $\vec{\varphi} : \mathbb{C} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}$ qui à tout complexe $z = x + iy$ associe le vecteur $x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ est une bijection qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ et $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Pour tout $\vec{V}$ appartenant à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ $z = \varphi^{-1}(\vec{V})$ s'appelle aussi ***l'affixe de*** $\vec{V}$. Si $M(z)$ et $M'(z')$ sont deux points du plan $\mathcal{P}$, on a les propriétés suivantes :

M et M' sont symétriques par rapport à O si et seulement si $z' = -z$

M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{\imath})$ si et seulement si $z' = \overline{z}$

M et M' sont symétriques par rapport à $(O, \vec{\jmath})$ si et seulement si $z' = -\overline{z}$

1.1.6 Notation exponentielle

Pour tout θ réel, on note : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. Cette notation est justifiée par les propriétés suivantes :

1 - Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')} \end{aligned}$$

On en déduit en particulier par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

2 - $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 0$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \dfrac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}$

Il en résulte : $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Sous forme trigonométrique, cette formule est dite formule de Moivre et s'écrit :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \text{ , } \forall\, \theta \in \mathbb{R} \text{ , } \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

3 - $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = 1 \Longleftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

4 - $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

5 - $\forall\, z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \Longleftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R} \mid z = e^{i\theta}$

On note : $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{i\theta} \text{ , } \theta \in \mathbb{R}\}$

Finalement tout nombre complexe z pourra s'écrire : $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta = \mathrm{Arg}(z)$. C'est la notation exponentielle d'un nombre complexe qui n'est qu'une variante de la forme trigonométrique.

De la notation exponentielle, on déduit également les formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \, , \; \boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Rappelons encore deux formules qui seront très utiles pour effectuer des calculs dans $\mathbb{C}$:

1 - Sommation des termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour tout $q \in \mathbb{C}$, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

2 - Formule du binôme de Newton

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Cette dernière formule se démontre par récurrence en utilisant la formule de Pascal :

Pour tous entiers n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$: $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n-1}{p} + \dbinom{n-1}{p-1}$

1.2 Racines carrees d'un nombre complexe

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 — Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée de z dans* $\mathbb{C}$, tout nombre complexe u tel que $u^2 = z$.

REMARQUE — Si $z = 0$, $u = 0$ est la seule racine carrée de z dans $\mathbb{C}$.

Théorème 1.2.1 — Tout $z \in \mathbb{C}^*$ admet exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$. Si on désigne par u_1 et u_2 ces deux racines, on a alors la relation : $u_2 = -u_1$

PREUVE — Posons $z = a + ib$ et cherchons $u \in \mathbb{C}$ (écrit sous la forme $u = x + iy$) tel que $u^2 = z$.

$\triangleright$ Si $b = 0$:

$*$ Si $a > 0$: $u^2 = z \Longleftrightarrow u^2 = a \Longleftrightarrow u^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \Longleftrightarrow (u - \sqrt{a})(u + \sqrt{a}) = 0$;
par conséquent $u^2 = z \Longleftrightarrow u = \pm\sqrt{a}$

$*$ Si $a < 0$: $u^2 = z \Longleftrightarrow u^2 = a \Longleftrightarrow u^2 - (i\sqrt{-a})^2 = 0 \Longleftrightarrow (u - i\sqrt{-a})(u + i\sqrt{-a}) = 0$;
par conséquent $u^2 = z \Longleftrightarrow u = \pm i\sqrt{-a}$

▷ Si $b \neq 0$:

$$\begin{aligned}
u^2 = z &\iff u^2 = z \text{ et } |u|^2 = |z| \\
&\iff x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib \text{ et } x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} + a\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right) \\ xy = \frac{b}{2} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} + a\right)} \\ y = \varepsilon' \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2} - a\right)} \\ xy = \frac{b}{2} \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \varepsilon' = \pm 1 \\
&\iff \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \varepsilon' \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ \varepsilon\,\varepsilon'\,|b| = b \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \text{ et } \varepsilon' = \pm 1
\end{aligned}$$

Donc :

▷ Si $b > 0$: $u^2 = z \iff \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \varepsilon' \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ \varepsilon = \varepsilon' \end{cases}$

z admet donc deux racines carrées qui sont : $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$

▷ Si $b < 0$: $u^2 = z \iff \begin{cases} x = \varepsilon \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ y = \varepsilon' \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \\ \varepsilon = -\varepsilon' \end{cases}$

z admet donc deux racines carrées qui sont : $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$ ■

1.2.2 Application à la résolution de l'équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit l'équation $(E)\ :\ az^2+bz+c=0$ avec $(a,b,c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. La décomposition canonique du trinôme du second degré donne, puisque $a\neq 0$:

$$az^2+bz+c=0\iff\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0\iff\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$\Delta=b^2-4ac$ est le discriminant du trinôme. Si δ désigne une des racines carrées de Δ, on voit que les racines de (E) sont données par :

$$z_1=\frac{-b+\delta}{2a}\quad\text{et}\quad z_2=\frac{-b-\delta}{2a}$$

Si $\Delta=0$, $\delta=0$ et les deux racines sont confondues.

La somme des racines est : $S=z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$, tandis que leur produit est : $P=z_1z_2=\dfrac{b^2-\delta^2}{4a^2}=\dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\dfrac{c}{a}$.

EXEMPLE — Résoudre l'équation $(E)\ :\ ix^2+(4-3i)x-7-i=0$

Le discriminant de cette équation est $\Delta=(4-3i)^2+4i(7+i)=3+4i$ dont les racines carrées (calculées par la méthode précédente) sont $\delta=\pm(2+i)$. Les racines de (E) sont alors données par :

$$z_1=\frac{-(4-3i)+(2+i)}{2i}=2+i\quad,\quad z_2=\frac{-(4-3i)-(2+i)}{2i}=1+3i$$

1.2.3 Applications trigonométriques

1° Développement de $\cos n\theta$, $\sin n\theta$

D'après la formule de Moivre et la formule du binôme, on a :

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}i^k(\sin\theta)^k$$

On obtient alors les développements de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en identifiant parties réelles et imaginaires dans cette égalité.

EXEMPLE —
$$\begin{aligned}\cos 3\theta+i\sin 3\theta&=(\cos\theta+i\sin\theta)^3\\&=\cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta\end{aligned}$$

D'où :
$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\\ \sin 3\theta&=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

2° Linéarisation de $\cos^p\theta$, $\sin^p\theta$, $\cos^p\theta\sin^q\theta$, $(p,q)\in\mathbb{N}^2$

On utilise la formule du binôme et les formules d'Euler.

EXEMPLE —
$$\begin{aligned}\cos^3\theta&=\left[\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})\right]^3\\&=\frac{1}{8}(e^{3i\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-3i\theta})\\&=\frac{1}{4}(\cos 3\theta+3\cos\theta)\end{aligned}$$