Chapitre 1 : Rappels de géométrie plane élémentaire

1 Positions relatives de deux droites

Définition 1 – *Par deux points distincts du plan, A et B, il passe une unique droite notée (AB).*
- *Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites* ***parallèles*** *si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues ou n'ont aucun point en commun ; on note alors $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$.*
- *Deux droites sont dites* ***sécantes*** *si elles ne sont pas parallèles ; leur intersection est alors réduite à un point.*

Ainsi, ***deux droites du plan sont alors ou bien sécantes ou bien parallèles****.*

Proposition 2 – *Par un point pris hors d'une droite $\mathcal{D}$ il passe une et une seule droite parallèle à $\mathcal{D}$.*
- *Si deux droites sont parallèles, toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre.*
- *Si deux droites sont parallèles, toute droite sécante à l'une est sécante à l'autre.*

2 Quelques notions bien connues

2.1 Demi-droites, segments, longueur, milieu

Définition 3 – *Si A et B sont deux points distincts, on note $[AB)$ la* ***demi-droite*** *d'extrémité A et passant par B (attention, $[AB) \neq [BA)$).*
- *Si A et B sont deux points distincts, on note $[AB]$ ou $[BA]$ le* ***segment de droite*** *dont ces deux points sont les extrémités.*
- *Le plan est muni d'une notion de distance : on note AB la* ***distance*** *entre deux points A et B, c'est-à-dire la longueur du segment $[AB]$ ou $[BA]$.*
- *A et B étant deux points distincts du plan, on appelle* ***milieu*** *de $[AB]$ l'unique point I de ce segment tel que $AI = BI = \frac{1}{2}AB$.*

Proposition 4 *Etant donnés trois points A, B et C, on a l'****inégalité triangulaire***

$$AB = AC + BC.$$

L'égalité a lieu si et seulement si C est un point de $[AB]$.

2.2 Angles

Définition 5 *On appelle* ***angle non-orienté*** *ou simplement* ***angle*** *la plus petite portion de plan délimité par deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ de même origine O. Cette origine est appelé le* ***sommet*** *de l'angle. Les demi-droites sont appelés les côtés de l'angle. On désigne par $\widehat{AOB}$ l'angle formé par les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$.*

Définition 6 *On munit le plan d'une* ***orientation****, le sens* ***direct*** *ou* ***trigonométrique*** *(c'est le sens anti-horaire). Un* ***angle orienté*** *est la portion de plan délimité par deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ de même origine O relativement à l'orientation du plan. On désigne aussi par $\widehat{AOB}$ l'angle orienté formé par les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. En particulier, étant donné trois points distincts A, O, B du plan, $\widehat{AOB} = -\widehat{BOA}$.*

Il existe deux unités de mesure des angles :

- Le degré (noté $\circ$).
- Le radiant.

Les angles (non-orientés) sont définis à $180°k$ près ou à πk près, $k \in \mathbb{Z}$. Les angles orientés sont définis à $360°k$ ou à $2\pi k$ près, $k \in \mathbb{Z}$. Dans la suite, nous confondrons l'angle et sa mesure.

On passe d'une unité à l'autre comme ceci :

$$\text{Degré} \xrightarrow{\times \frac{2\pi}{360}} \text{Radian}, \qquad \text{Radian} \xrightarrow{\times \frac{360}{2\pi}} \text{Degré}.$$

Voici quelques exemples de mesures d'angles :

Degré	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$180°$	$360°$
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	2π

Définition 7 *Un angle **droit** est un angle égal à* $90°$ *(ou* $\dfrac{\pi}{2}$*). Un angle **plat** est un angle égal à* $180°$ *(ou* π*).*

Définition 8 – *Deux angles sont **adjacents** lorsque :*
  - *ils ont le même sommet ;*
  - *ils ont un côté commun ;*
  - *ils sont de part et d'autre de ce côté commun.*
- *Deux angles dont la somme des mesures est égale à* $180°$ *sont dits **supplémentaires**. Deux angles supplémentaires ne sont pas nécessairement adjacents.*
- *On dit que deux angles sont **opposés par le sommet** lorsque :*
  - *ils ont le même sommet ;*
  - *leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.*

Proposition 9 *Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.*

2.3 Droites perpendiculaires

Deux droites sécantes définissent quatre secteurs angulaires qui sont soit opposés par le sommet (et ont même mesure), soit adjacents et sont supplémentaires (leur somme vaut donc π radians ou $180°$).

Définition 10 *Deux droites* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont dites **perpendiculaires** si elles sont sécantes et si deux angles adjacents ainsi définis sont égaux, on note* $\mathcal{D} \perp \mathcal{D}'$*. Une mesure de ces angles est donc* $\frac{\pi}{2}$ *radians soit* $90°$*.*

Proposition 11 – *Par un point, il passe une et une seule droite perpendiculaire à une droite donnée.*
- *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*
- *Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles entre elles.*

Définition 12 *On appelle **projection orthogonale** d'un point* A *sur une droite* $\mathcal{D}$ *le point d'intersection* B *de* $\mathcal{D}$ *et de la droite perpendiculaire à* $\mathcal{D}$ *passant par* A *;* A *et* B *sont confondus lorsque* $A \in \mathcal{D}$*. La distance de* A *à la droite* $\mathcal{D}$ *est la longueur* AB*, qui est nulle si* A *et* B *sont confondus.*

2.4 Polygones

Définition 13 – *Un **polygone** à n côtés est une figure géométrique définie par la donnée de n points, les **sommets** du polygone (on suppose que trois sommets consécutifs ne sont pas alignés) ; les **côtés** d'un polygone sont les segments reliant deux sommets consécutifs.*
- *On appelle **angle d'un polygone** tout angle "intérieur" défini par trois sommets consécutifs.*
- *Un polygone est dit **convexe** s'il est situé entièrement dans l'un des deux demi-plans défini par la droite supportant l'un quelconque de ses côtés.*

Un **quadrilatère** est un polygone à 4 cotés. Cas particulier fondamental : le **parallélogramme**.

Définition 14 *Un **parallélogramme** est un quadrilatère vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes :*
- *Les côtés opposés sont deux à deux parallèles.*
- *Les diagonales se coupent en leur milieu.*
- *Le quadrilatère est convexe et ses côtés opposés ont même longueur deux à deux.*
- *Le quadrilatère est convexe et ses angles opposés ont même mesure deux à deux.*
- *Les angles consécutifs du quadrilatère sont deux à deux supplémentaires.*
- *Le quadrilatère est convexe et deux côtés opposés ont même longueur et sont parallèles.*

3 Vecteurs

On rappelle que si A et B sont deux points du plan, on note $\overrightarrow{AB}$ le vecteur associé. L'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ équivaut à dire que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme ; ces deux vecteurs sont dits **équipollents**.

AB désigne la norme, ou le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut sommer deux vecteurs ou faire le produit d'un vecteur par un nombre réel.

3.1 Produit scalaire

Définition 15 – *Etant donné deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, il existe trois points A, B, C du plan tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. L'**angle** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, est égal à l'angle (orienté) $\widehat{BAC}$.*
- *Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est défini par :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB.CD \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

où $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ désigne l'angle de ces deux vecteurs. Si l'un des deux vecteurs est nul alors ce produit scalaire est nul.

Proposition 16 – *Deux droites (AB) et (CD) sont **perpendiculaires** si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.*
- *On a l'égalité :*

$$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB^2 + AC^2 - BC^2.$$

- *Théorème de **Pythagore** : $[AB]$ et $[AC]$ sont perpendiculaires si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.*

3.2 Barycentres

Définition 17 *Etant donnés n points A_i et n nombres réels α_i dont la somme est non nulle, on appelle* ***barycentre*** *du système $((A_i, \alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$ l'unique point G tel que*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Proposition 18

- *Pour tout point M du plan, on a*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \overrightarrow{MG} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}.$$

- *Le milieu d'un segment $[AB]$ est le barycentre des points A et B, affectés de la même pondération ; on dit alors que c'est l'****isobarycentre*** *de ces deux points.*

4 Cercles et droites

Définition 19 *Un* ***cercle*** *de* ***centre*** *O et de* ***rayon*** *R est l'ensemble des points dont la distance à O est égale à R. Tout segment reliant O à un point du cercle s'appelle aussi rayon.*

Proposition 20 *Une droite et un cercle peuvent être* ***sécants*** *(deux points distincts), ou* ***extérieurs*** *(aucun point commun) ou bien* ***tangents*** *en un point où la tangente est perpendiculaire au rayon.*