# Chapitre 4

# Equations différentielles linéaires

## 4.1 Equations différentielles linéaires du premier ordre

### 4.1.1 Définitions et généralités

**Définition 4.1.1** — *Soit $k \in \mathbb{N}$, $D$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $D$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $f$ est de* ***classe** $\mathcal{C}^k$ **sur** $D$ si $f$ est $k$ fois dérivable sur $D$ et $f^{(k)}$ est continue sur $D$.*

*On note $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur $D$. En particulier $\mathcal{C}^0(D,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur $D$, $\mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions dérivables et à dérivée continue sur $D$ et $\mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions deux fois dérivables et à dérivée seconde continue sur $D$.*

**Définition 4.1.2** — *1 - On appelle* ***équation différentielle linéaire du premier ordre*** *toute équation de la forme :*

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \tag{$L$}$$

*où $a$, $b$ et $c$ sont trois fonctions données à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $I$ et $y$ est une fonction inconnue à déterminer.*

*Si la fonction $c$ est nulle, l'équation différentielle est dite* ***homogène****.*

*On appelle* ***équation homogène*** *ou* ***équation sans second membre*** *associée à $(L)$ l'équation*

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{$H$}$$

*2 - On appelle* ***solution*** *de l'équation $(L)$ (resp. $(H)$) toute application $y\ :\ I \longmapsto \mathbb{R}$ telle que :*

**a)** *$y$ est dérivable sur $I$.*

**b)** $\forall\, x \in I\ ,\ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = c(x)$ *(resp.* $a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$)

*3 - La courbe représentative de toute solution $y$ sur $I$ est appelée* ***courbe intégrale*** *de l'équation différentielle.*

REMARQUES — 1 - Résoudre une équation différentielle, c'est en trouver toutes les solutions en ayant bien soin de préciser l'intervalle $I$ sur lequel elles sont définies. Par exemple, pour l'équation :

$$y' - \frac{y}{x} = |x|$$

les fonctions $a\ :\ x \longmapsto 1$, $b\ :\ x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ et $c\ :\ x \longmapsto |x|$ admettent comme plus grand intervalle de continuité commun, soit $I = ]-\infty, 0[$, soit $I = ]0, +\infty[$. On cherchera donc des solutions de cette équation sur l'un ou l'autre de ces intervalles.

2 - Soit $J$ un intervalle inclus dans $I$ tel que la fonction $a$ ne s'annule pas sur $J$. Si $y$ est solution de $(L)$ (resp. de $(H)$) sur $J$, $y$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$. En effet, d'après la définition **5.1.2** $y$ est dérivable sur $I$, donc sur $J$ et vérifie sur $J$ l'équation :

$$y'(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}y(x) + \frac{c(x)}{a(x)}$$

Comme les fonctions $-\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$ et $y$ sont continues sur $J$, il en est de même de $y'$ et $y$ est donc bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$.

3 - Très souvent en physique, en mécanique, en chimie ou encore en biologie, on est amené à chercher les solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre vérifiant la condition $y(x_0) = y_0$ où $(x_0, y_0)$ est donné dans $I \times \mathbb{R}$. Graphiquement, ceci revient à déterminer les courbes intégrales de l'équation $(L)$ passant par le point de coordonnées $(x_0, y_0)$.

Résoudre ce type de problème s'appelle résoudre un problème de Cauchy et la condition

$$y(x_0) = y_0$$

est dite condition initiale du problème de Cauchy.

EXEMPLES — L'équation $y' - y = 0$ admet pour solutions sur $\mathbb{R}$, $y = Ce^x$ où $C$ est une constante réelle arbitraire. Si l'on impose à toute solution de cette équation de vérifier $y(0) = 7$, le problème de Cauchy ainsi posé admet l'unique solution définie par $y(x) = 7e^x$.

### 4.1.2 L'équation homogène $(H)\ :\ a(x)y' + b(x)y = 0$

**Proposition 4.1.1** — *Si la fonction $a$ ne s'annule pas sur $I$, les solutions de $(H)$ sur $I$ sont les fonctions de la forme :*

$$y\ :\ I \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto Ce^{-A(x)}$$

*où $A$ est une primitive sur $I$ de la fonction $\frac{b}{a}$ et $C$ une constante réelle arbitraire.*

PREUVE — Soit $y$ une solution quelconque de $(H)$ sur $I$, alors si $A$ est une primitive de $\frac{b}{a}$ sur $I$, la fonction $x \longmapsto y(x)e^{A(x)}$ est dérivable sur $I$ et pour tout $x \in I$ :

$$\left(y(x)e^{A(x)}\right)' = y'(x)e^{A(x)} + A'(x)y(x)e^{A(x)} = \left(y'(x) + \frac{b(x)}{a(x)}y(x)\right)e^{A(x)} = 0$$

Donc il existe une constante $C$ telle que :

$$\forall\, x \in I\ ,\ y(x)e^{A(x)} = C \Longleftrightarrow \forall\, x \in I\ ,\ y(x) = Ce^{-A(x)}$$

Réciproquement, il est immédiat de vérifier que toute fonction de cette forme est solution de $(H)$ sur $I$, d'où le résultat. □

**Proposition 4.1.2** — *L'ensemble $S(H)$ des solutions de $(H)$ sur $I$ est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire vérifie :*

$$\forall\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \forall\, (y, z) \in (S(H))^2\ ,\ \lambda y + \mu z \in S(H)$$

PREUVE — Soit $y$ et $z$ deux éléments de $S(H)$, c'est-à-dire deux solutions de $(H)$ sur $I$. Alors :

$$\forall\, x \in I\ ,\ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \ \text{ et } \ a(x)z'(x) + b(x)z(x) = 0$$

En multipliant la première équation par $\lambda$, la seconde par $\mu$ et en ajoutant membre à membre les équations obtenues, on obtient :

$$\forall\, x \in I\ ,\ a(x)(\lambda y'(x) + \mu z'(x)) + b(x)(\lambda y(x) + \mu z(x)) = 0$$

Ceci montre que $\lambda y + \mu z$ est solution de $(H)$ sur $I$, donc élément de $S(H)$. □

REMARQUE — Nous avons vu que les solutions de $(H)$ dépendaient d'une constante arbitraire. Lorsque l'on fixe la valeur de la constante, la solution correspondante est dite ***solution particulière*** de cette équation. Par exemple, $y\ :\ x \longmapsto 3e^{\frac{x^2}{2}}$ est une solution particulière de l'équation

$$y' - xy = 0$$

### 4.1.3 L'équation complète $(L)\ :\ a(x)y' + b(x)y = c(x)$

**Proposition 4.1.3** — *Si la fonction $a$ ne s'annule pas sur $I$, l'ensemble $S(L)$ des solutions de $(L)$ sur $I$ est l'ensemble des sommes formées d'une solution particulière $y_0$ de l'équation complète $(L)$ et d'une solution $y_H$ de l'équation homogène $(H)$.*

PREUVE — Soit $y$ une solution quelconque de $(L)$ et $y_0$ une solution particulière de $(L)$. Alors pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} a(x)(y-y_0)'(x) + b(x)(y-y_0)(x) &= a(x)y'(x) + b(x)y(x) - (a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x)) \\ &= c(x) - c(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $y - y_0$ est solution de $(H)$ et en posant $y_H = y - y_0$, on a $y = y_0 + y_H$ avec $y_H$ dans $S(H)$. Ceci montre que toute solution de $(L)$ est la somme d'une solution particulière $y_0$ de $(L)$ et d'une solution $y_H$ de $(H)$.

Réciproquement, si $y$ est la somme d'une solution particulière $y_0$ de $(L)$ et d'une solution $y_H$ de $(H)$, il vient :

$$\begin{aligned} a(x)y'(x) + b(x)y(x) &= a(x)(y_0 + y_H)'(x) + b(x)(y_0 + y_H)(x) \\ &= a(x)y_0'(x) + a(x)y_H'(x) + b(x)y_0(x) + b(x)y_H(x) \\ &= (a(x)y_0'(x) + b(x)y_0(x)) + (a(x)y_H'(x) + b(x)y_H(x)) = c(x) \end{aligned}$$

Ceci montre que toute somme $y_0 + y_H$ d'une solution particulière $y_0$ de $(L)$ et d'une solution $y_H$ de $(H)$ est solution de $(L)$. □

EXEMPLES — 1 - $xy' - y + 1 = 0 \quad (L)$.

La fonction $a\ :\ x \longmapsto x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et les fonctions $a\ :\ x \longmapsto x$, $b\ :\ x \longmapsto -1$ et $c\ :\ x \longmapsto -1$ sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. On cherche donc les solutions de $(L)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$y = 1$ est solution particulière de $(L)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont données par $y_H(x) = Cx\ ,\ C \in \mathbb{R}$. Donc les solutions de $(L)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont données par :

$$y\ :\ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto Cx + 1\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

On pourrait aussi chercher de même les solutions de $(L)$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et on trouverait les solutions :

$$y\ :\ \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto Dx + 1\ ,\ D \in \mathbb{R}$$

2 - Soit l'équation $(1+x^2)y' + xy - 2x = 0 \quad (L)$.

On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $a\ :\ x \longmapsto 1+x^2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions $x \longmapsto 1+x^2$, $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto 2x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. $y_0 = 2$ est solution particulière de $(L)$ et l'équation homogène associée a pour solutions :

$$x \longmapsto y_H(x) = Ce^{-\int \frac{x}{1+x^2}dx} = Ce^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Les solutions de $(L)$ sont alors données par : $y = y_H + 2\ :\ x \longmapsto \dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}} + 2\ ,\ C \in \mathbb{R}$.

**Proposition 4.1.4 — Principe de superposition des solutions**

*Si le second membre $c$ de l'équation $(L)$ s'écrit sous la forme $\sum_{i=1}^{p} c_i$, où chaque fonction $c_i$ est définie et continue sur l'intervalle $I$, notons pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $(L_i)$ l'équation différentielle*

$$a(x)y' + b(x)y = c_i(x) \qquad (L_i)$$

*Alors si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $y_i$ est solution particulière de $(L_i)$ sur $I$, $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$ est solution particulière de $(L)$ sur $I$.*

PREUVE — Si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $y_i$ désigne une solution particulière de $(L_i)$ sur $I$, il vient :

$$\forall x \in I\ ,\ a(x)\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right)'(x) + b(x)\sum_{i=1}^{p} y_i(x) = \sum_{i=1}^{p}[a(x)y_i'(x) + b(x)y_i(x)] = \sum_{i=1}^{p} c_i(x) = c(x)$$

Donc $y = \sum_{i=1}^{p} y_i$ est solution particulière de $(L)$. □

EXEMPLE — Résoudre l'équation $(L)$ : $y' - y = e^x + \sin x - x^2$.

On cherche ses solutions sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions

$$y_H\ :\ x \longmapsto Ce^x$$

et d'autre part :

$y_1\ :\ x \longmapsto xe^x$ est solution particulière de l'équation $(L_1)\ :\ y' - y = e^x$

$y_2\ :\ x \longmapsto -\frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ est solution particulière de l'équation $(L_2)\ :\ y' - y = \sin x$

$y_3\ :\ x \longmapsto x^2 + 2x + 2$ est solution particulière de l'équation $(L_3)\ :\ y' - y = -x^2$

Les solutions de $(L)$ sont donc données par :

$$y(x) = Ce^x + xe^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + x^2 + 2x + 2\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

### 4.1.4 Méthode de variation de la constante

Si l'on connait une solution particulière de $(L)$, on sait résoudre cette équation grâce aux propositions **4.1.1, 4.1.3** et **4.1.4**. Par contre si on ne connait pas de solution particulière de $(L)$, on utilisera le résultat de la proposition suivante, dit **méthode de variation de la constante**.

**Proposition 4.1.5** — *Si la fonction $a$ ne s'annule pas sur $I$ et si $y_H$ est une solution non nulle de $(H)$, une solution particulière de $(L)$ est donnée sous la forme $y = \lambda y_H$ où $\lambda$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ déterminée par :*

$$\forall x \in I\ ,\ \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x) y_H(x)}$$

PREUVE — Soit $y_H$ une solution non nulle de l'équation homogène associée à $(L)$. Cherchons une solution $y$ de $(L)$ sous la forme $y = \lambda y_H$ où $\lambda$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Alors on doit avoir :

$$ay' + by = c \Longleftrightarrow a\lambda' y_H + a\lambda y_H' + b\lambda y_H = c \Longleftrightarrow a\lambda' y_H = c \ \ (\text{car } \ ay_H' + by_H = 0)$$

Puisque $y_H$ est non nulle et donnée par $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$, elle ne s'annule en aucun point de $I$ et on en déduit :

$$\forall x \in I\ ,\ \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x) y_H(x)}$$

d'où l'on tire $\lambda$ par primitivation, puis $y = \lambda y_H$. □

EXEMPLES — 1 - Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $(L)\ :\ xy' = x + y$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $a\ :\ x \longmapsto x$ ne s'annule pas et une solution non nulle de l'équation homogène associée est :

$$y_H\ :\ x \longmapsto e^{\ln|x|} = e^{\ln x} = x$$

Alors une solution particulière de $(L)$ est donnée par :

$$y = \lambda y_H \ \text{ avec } \ \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{telle que } \ \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)y_H(x)} = \frac{1}{x}$$

En choisissant $\lambda(x) = \ln x$, une solution particulière de $(L)$ est donnée par $y_0(x) = x \ln x$ et les solutions de $(L)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont données par $y(x) = x \ln x + Cx\ ,\ C \in \mathbb{R}$.

2 - Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation $(L)\ :\ y' \cos x + y \sin x = 1$.

Sur l'intervalle considéré, la fonction $a\ :\ x \longmapsto \cos x$ ne s'annule pas et une solution non nulle de l'équation homogène associée est :

$$y_H\ :\ x \longmapsto e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{\ln|\cos x|} = |\cos x| = \cos x$$

Alors une solution particulière de $(L)$ est donnée par :

$$y = \lambda y_H \ \text{ avec } \ \lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \text{telle que } \ \lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)y_H(x)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

En choisissant $\lambda(x) = \tan x$, une solution particulière de $(L)$ est donnée par

$$y_0(x) = \tan x \times \cos x = \sin x$$

et les solutions de $(L)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont données par $y(x) = \sin x + C \cos x\ ,\ C \in \mathbb{R}$.

**Proposition 4.1.6 — Existence et unicité d'une solution satisfaisant une condition initiale**

*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $a$, $b$, $c$ trois fonctions continues de $I$ dans $\mathbb{R}$ telles que $a$ ne s'annule pas sur $I$ et $(L)$ l'équation différentielle linéaire du premier ordre $ay' + by = c$. Alors pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution $y$ de $(L)$ sur $I$ telle que $y(x_0) = y_0$.*

PREUVE — **Existence** - On peut obtenir une expression explicite d'une solution de $(L)$ par la méthode de variation de la constante. Soit $A$ la primitive sur $I$ de $\frac{b}{a}$ telle que $A(x_0) = 0$. Alors la fonction $y_H : x \longmapsto e^{-A(x)}$ est une solution de l'équation homogène $(H)$ ne s'annulant pas sur l'intervalle $I$. En posant $y = \lambda y_H$, on obtient avec les notations précédentes, $\lambda'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}e^{A(x)}$ et la fonction $x \longmapsto \frac{c(x)}{a(x)}e^{A(x)}$ admet une unique primitive $B$ définie sur $I$ telle que $B(x_0) = y_0e^{A(x_0)}$. Alors la fonction $y$ donnée sur l'intervalle $I$ par $y(x) = B(x)e^{-A(x)}$ est solution de $(L)$ sur $I$ et vérifie $y(x_0) = B(x_0)e^{-A(x_0)} = y_0$.

**Unicité** - Supposons qu'il existe deux solutions $y_1$ et $y_2$ de $(L)$ sur $I$ vérifiant les conditions $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$. Alors la fonction $y_1 - y_2$ est solution de $(H)$ sur $I$ et est donc donnée par :

$$\forall\, x \in I \ , \ (y_1 - y_2)(x) = y_1(x) - y_2(x) = Ce^{-A(x)}$$

où la constante $C$ est déterminée par :

$$Ce^{-A(x_0)} = y_1(x_0) - y_2(x_0) = 0 \ \text{ soit } \ C = 0$$

D'où :

$$\forall\, x \in I \ , \ y_1(x) = y_2(x) \ \text{ soit } \ y_1 = y_2$$

□

### 4.1.5 Exemple d'équation où la fonction $a$ s'annule

Considérons l'équation différentielle du premier ordre :

$$x^2y' - y = 0 \qquad (H)$$

et cherchons si elle admet des solutions sur $\mathbb{R}$ autres que la solution triviale $y = 0$.

Si $y$ est solution de $(H)$ sur $\mathbb{R}$, alors $y$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et par suite, il existe une constante $C$ réelle telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^* \ , \ y(x) = Ce^{-\frac{1}{x}}$$

$y$ est aussi solution sur $\mathbb{R}_-^*$ et donc il existe une constante $D$ réelle telle que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_-^* \ , \ y(x) = De^{-\frac{1}{x}}$$

Comme $y$ est solution de $(H)$ sur $\mathbb{R}$, $y$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc dérivable en $0$ et par suite continue en $0$. D'après l'équation $(H)$, $y(0) = 0$ et la condition $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x) = 0$ impose $D = 0$. En conséquence, si $y$ est solution de $(H)$ sur $\mathbb{R}$, $y$ est nécessairement de la forme :

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{-\frac{1}{x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Réciproquement, toute fonction $y$ de cette forme est dérivable sur $\mathbb{R}$ ; c'est évident sur $\mathbb{R}^*$ et en $0$, on a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x \to 0^+} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

De plus pour tout $x$ réel, $y$ vérifie l'équation $(H)$.

Par conséquent $(H)$ admet des solutions sur $\mathbb{R}$ données par l'expression ci-dessus où $C$ est une constante réelle arbitraire.

## 4.2 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

**Définition 4.2.1** — *1 - On appelle* ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** *toute équation de la forme :*

$$ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (L)$$

*où $a$, $b$ et $c$ sont trois nombres réels donnés tels que $a$ soit non nul, $f$ est une fonction donnée à valeurs réelles définie et continue sur un intervalle $I$ et $y$ une fonction inconnue à déterminer.*

*Si la fonction $f$ est nulle, l'équation différentielle est dite* ***homogène****.*

*On appelle* ***équation homogène*** *ou* ***équation sans second membre*** *associée à $(L)$ l'équation*

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H)$$

*2 - On appelle* ***solution*** *de l'équation $(L)$ (resp. $(H)$) toute application $y\ :\ I \longmapsto \mathbb{R}$ telle que :*

**a)** *$y$ est deux fois dérivable sur $I$.*

**b)** $\forall\, x \in I\ ,\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ *(resp.* $ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$*)*

*3 - La courbe représentative de toute solution $y$ sur $I$ est appelée* ***courbe intégrale*** *de l'équation différentielle.*

EXEMPLE — $y'' - 2y' + y = \ln x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre dont les solutions sont à chercher sur $\mathbb{R}_+^*$.

REMARQUES — 1 - Si $y$ est solution de $(L)$ (resp. de $(H)$) sur $I$, $y$ est nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$. En effet, d'après la définition **5.2.1**, $y$ est deux fois dérivable sur $I$ et vérifie sur $I$ l'équation :

$$y''(x) = -\frac{b}{a}y'(x) - \frac{c}{a}y(x) + \frac{1}{a}f(x)$$

Comme les fonctions $y'$, $y$ et $f$ sont continues sur $I$, il en est de même de $y''$ et $y$ est donc bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $I$.

2 - En mécanique, l'étude de certains mouvements conduit à la recherche des solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$ où $(x_0, y_0, y_1)$ est donné dans $I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $y_0$ et $y_0'$ représentent respectivement la position et la vitesse du mobile à l'instant $x_0$. Graphiquement, ceci revient à déterminer les courbes intégrales de l'équation $(L)$ passant par le point de coordonnées $(x_0, y_0)$ et admettant en ce point une tangente de pente $y_1$.

Résoudre ce type de problème s'appelle encore résoudre un problème de Cauchy et les conditions

$$y(x_0) = y_0\ ,\ y'(x_0) = y_1$$

sont dites conditions initiales du problème de Cauchy.

3 - En résistance des matériaux, l'étude du comportement d'une poutre sur appui aux points d'abscisses $x_0$ et $x_1$ conduit à la recherche des solutions d'équations différentielles linéaires du second ordre vérifiant les conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y(x_1) = y_1$ où $(x_0, x_1, y_0, y_1)$ est donné dans $I \times I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Graphiquement, ceci revient à déterminer les courbes intégrales de l'équation $(L)$ passant par les deux points de coordonnées $(x_0, y_0)$ et $(x_1, y_1)$.

Résoudre ce type de problème s'appelle résoudre un problème aux limites et les conditions

$$y(x_0) = y_0\ ,\ y(x_1) = y_1$$

sont dites conditions aux limites du problème.

### 4.2.1 L'équation homogène $(H)\ :\ ay'' + by' + cy = 0$

L'idée pour résoudre l'équation $(H)$ est de chercher des solutions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $y\ :\ x \longmapsto e^{rx}$. Une telle fonction est solution de $(H)$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Longleftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

**Définition 4.2.2** — *L'équation du second degré $ar^2 + br + c = 0$ associée à l'équation différentielle $(H)$ est appelée* ***équation caractéristique*** *de $(H)$ et sera notée $E_c$ dans toute la suite.*

On a alors le résultat suivant :

**Proposition 4.2.1** — *1 - Si $E_c$ admet deux racines réelles distinctes $r_1$ et $r_2$, les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont données par :*

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

*2 - Si $E_c$ admet une racine réelle double $r$, les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont données par :*

$$y(x) = (Ax + B)e^{rx}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

*3 - Si $E_c$ admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont données par :*

$$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

PREUVE — Quel que soit le discriminant de l'équation caractéristique, les racines $r_1$ et $r_2$ vérifient :

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } r_1r_2 = \frac{c}{a}$$

**1°** Si $r_1$ et $r_2$ sont réelles distinctes :

$$(H) \Longleftrightarrow y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1r_2y = 0 \Longleftrightarrow (y' - r_1y)' - r_2(y' - r_1y) = 0$$

Cette équation est une équation linéaire homogène du premier ordre pour la fonction inconnue $y' - r_1y$ dont les solutions sont :

$$y' - r_1y = Ce^{r_2x}\ ,\ C \in \mathbb{R}$$

Cette équation est maintenant une équation linéaire du premier ordre avec second membre pour la fonction inconnue $y$, dont une solution particulière est $y_0(x) = \dfrac{C}{r_2 - r_1}e^{r_2x}$ et les solutions de l'équation homogène associée sont données par $y_H(x) = Ae^{r_1x}$. En posant $B = \dfrac{C}{r_2 - r_1}$ les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont alors données par :

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}\ ,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

**2°** Si $E_c$ admet une racine réelle double $r$, cette racine vérifie $2r = -\dfrac{b}{a}$ et $r^2 = \dfrac{c}{a}$. Alors

$$(H) \Longleftrightarrow y'' - 2ry' + r^2y = 0 \Longleftrightarrow (y' - ry)' - r(y' - ry) = 0$$

Comme précédemment, on a d'abord :

$$y' - ry = Ae^{rx}\ ,\ A \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Cette équation est une équation linéaire du premier ordre, dont la solution de l'équation homogène associée est $y_H(x) = Be^{rx}$. Cherchons une solution particulière par la méthode de variation de la constante. En posant $y = \lambda(x)e^{rx}$, $\lambda$ doit vérifier :

$$\lambda'(x)e^{rx} = Ae^{rx} \Longrightarrow \lambda(x) = Ax$$

Ainsi, une solution particulière de $(1)$ est $y_0(x) = Axe^{rx}$ et les solutions de $(H)$ sur $\mathbb{R}$ sont données par :

$$y(x) = (Ax + B)e^{rx} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

**3°** Si $E_c$ admet deux racines imaginaires conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on a :

$$r_1 + r_2 = 2\alpha = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = \alpha^2 + \beta^2 = \frac{c}{a} \tag{2}$$

Donc si on pose $y(x) = e^{\alpha x}z(x)$ :

$$y'(x) = e^{\alpha x}[\alpha z(x) + z'(x)] \ , \ y''(x) = e^{\alpha x}[\alpha^2 z(x) + 2\alpha z'(x) + z''x()]$$

En utilisant les relations $(2)$, l'équation $(H)$ s'écrit alors :

$$e^{\alpha x}[\alpha^2 z(x) + 2\alpha z'(x) + z''x()] - 2\alpha e^{\alpha x}[\alpha z(x) + z'(x)] + (\alpha^2 + \beta^2)e^{\alpha x}z(x)$$

soit

$$z''(x) + \beta^2 z(x) = 0 \tag{$H_1$}$$

Considérons une solution $z$ de $(H_1)$ et posons pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$\varphi(x) = z(0)\cos\beta x + \frac{z'(0)}{\beta}\sin\beta x \quad \text{et} \quad \psi(x) = (z'(x) - \varphi'(x))^2 + \beta^2(z(x) - \varphi(x))^2$$

Alors la fonction $\varphi$ vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \varphi''(x) + \beta^2\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(0) = z(0) \ , \ \varphi'(0) = z'(0)$$

D'autre part $\psi$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x$ réel :

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= 2(z'(x) - \varphi'(x))(z''(x) - \varphi''(x)) + 2\beta^2(z(x) - \varphi(x))(z'(x) - \varphi'(x)) \\ &= 2[z'(x) - \varphi'(x)][(z''(x) - \varphi''(x)) + \beta^2(z(x) - \varphi(x))] \\ &= 2[z'(x) - \varphi'(x)][(z''(x) + \beta^2 z(x)) - (\varphi''(x) + \beta^2\varphi(x)] \end{aligned}$$

Mais $z$ et $\varphi$ vérifient toutes deux l'équation $(H_1)$. Donc $\psi' = 0$, $\psi$ est constante sur $\mathbb{R}$ et égale à $\psi(0)$, c'est-à-dire $0$. On en déduit $z = \varphi$, ce qui montre que $z$ solution de $(H_1)$ est nécessairement de la forme :

$$z(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

où $A$ et $B$ sont deux constantes réelles.

Réciproquement il est clair que toute fonction de cette forme est solution de $(H_1)$. Donc les solutions de $(H_1)$ sont données par :

$$z(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Et il en résulte que les solutions de $(H)$ sont données par :

$$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

$\square$

EXEMPLES — 1 - Résoudre $(H)$ : $y'' - 2y' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ qui admet une racine double $r = 1$. Les solutions de $(H)$ sont donc données par :

$$y \, : \, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \, , \, x \longmapsto (Ax + B)e^x \, , \, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2 - Résoudre $(H)$ : $y'' + y' + y = 0$.

L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$ qui admet les racines imaginaires conjuguées $j = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\jmath} = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de $(H)$ sont donc données par :

$$y \, : \, \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \, , \, x \longmapsto e^{-\frac{x}{2}} \left( A \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} + B \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \, , \, (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

**Proposition 4.2.2** — *L'ensemble $S(H)$ des solutions de $(H)$ sur $I$ est stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire vérifie :*

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \, , \, \forall (y, z) \in (S(H))^2 \, , \, \lambda y + \mu z \in S(H)$$

PREUVE — Soit $y$ et $z$ deux éléments de $S(H)$, c'est-à-dire deux solutions de $(H)$ sur $I$. Alors :

$$\forall x \in I \, , \, ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0 \quad \text{et} \quad az''(x) + bz'(x) + cz(x) = 0$$

En multipliant la première équation par $\lambda$, la seconde par $\mu$ et en ajoutant membre à membre les équations obtenues, on obtient :

$$\forall x \in I \, , \, a(\lambda y''(x) + \mu z''(x)) + b(\lambda y'(x) + \mu z'(x)) + c(\lambda y(x) + \mu z(x)) = 0$$

Ceci montre que $\lambda y + \mu z$ est solution de $(H)$ sur $I$, donc élément de $S(H)$. $\square$

### 4.2.2 L'équation complète $(L)$ : $ay'' + by' + cy = f(x)$

**Proposition 4.2.3** — *L'ensemble $S(L)$ des solutions de $(L)$ sur $I$ est l'ensemble des sommes formées d'une solution particulière $y_0$ de l'équation complète $(L)$ et d'une solution $y_H$ de l'équation homogène $(H)$.*

PREUVE — Soit $y$ une solution quelconque de $(L)$ et $y_0$ une solution particulière de $(L)$. Alors pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned} & a(y - y_0)''(x) + b(y - y_0)'(x) + c(y - y_0)(x) \\ = \; & ay''(x) + by'(x) + cy(x) - (ay_0''(x) + by_0'(x) + cy_0(x)) \\ = \; & f(x) - f(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $y - y_0$ est solution de $(H)$ et en posant $y_H = y - y_0$, on a $y = y_0 + y_H$ avec $y_H$ dans $S(H)$. Ceci montre que toute solution de $(L)$ est la somme d'une solution particulière $y_0$ de $(L)$ et d'une solution $y_H$ de $(H)$.

Réciproquement, si $y$ est la somme d'une solution particulière $y_0$ de $(L)$ et d'une solution $y_H$ de $(H)$, il vient :

$$\begin{aligned} & ay''(x) + by'(x) + cy(x) \\ = \; & a(y_0 + y_H)''(x) + b(y_0 + y_H)'(x) + c(y_0 + y_H)(x) \\ = \; & ay_0''(x) + ay_H''(x) + by_0'(x) + by_H'(x) + cy_0(x) + cy_H(x) \\ = \; & (ay_0''(x) + by_0'(x) + cy_0(x)) + (ay_H''(x) + by_H'(x) + cy_H(x)) = f(x) \end{aligned}$$

Ceci montre que toute somme $y_0 + y_H$ d'une solution particulière $y_0$ de $(L)$ et d'une solution $y_H$ de $(H)$ est solution de $(L)$. $\square$

EXEMPLE — Résoudre l'équation $(L)$ : $y'' + y = e^x$.

On cherche les solutions sur $\mathbb{R}$, puisque $f\ :\ x \longmapsto e^x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Une solution particulière de $(L)$ est donnée par $y_0(x) = \dfrac{1}{2}e^x$. Comme les solutions de l'équation homogène associée sont données par $y_H\ :\ x \longmapsto \lambda \sin x + \mu \cos x$, les solutions de l'équation $(L)$ sont données par :

$$y\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ x \longmapsto \lambda \sin x + \mu \cos x + \frac{1}{2}e^x\ ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

**Proposition 4.2.4 — Principe de superposition des solutions**

*Si le second membre $f$ de l'équation $(L)$ s'écrit sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} f_i$, où chaque fonction $f_i$ est définie et continue sur l'intervalle $I$, notons pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $(L_i)$ l'équation différentielle*

$$ay'' + by' + cy = f_i(x) \qquad (L_i)$$

*Alors si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $y_i$ est solution particulière de $(L_i)$ sur $I$, $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i$ est solution particulière de $(L)$ sur $I$.*

PREUVE — Si pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $y_i$ désigne une solution particulière de $(L_i)$ sur $I$, il vient pour tout $x \in I$ :

$$\begin{aligned}
a\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right)''(x) + b\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right)'(x) + c\left(\sum_{i=1}^{p} y_i\right)(x) &= a\sum_{i=1}^{p} y_i''(x) + b\sum_{i=1}^{p} y_i'(x) + c\sum_{i=1}^{p} y_i(x) \\
&= \sum_{i=1}^{p} \left[a y_i''(x) + b y_i'(x) + c y_i(x)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{p} f_i(x) = f(x)
\end{aligned}$$

Donc $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} y_i$ est solution particulière de $(L)$.

EXEMPLE — Résoudre l'équation $(L)$ : $y'' + y = e^x - 3\sin 2x$.

On cherche les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$. Les solutions de l'équation homogène associée sont $y_H\ :\ x \longmapsto \lambda \sin x + \mu \cos x$ et d'autre part :

$y_1\ :\ x \longmapsto \dfrac{1}{2}e^x$ est solution particulière de l'équation $(L_1)\ :\ y'' + y = e^x$

$y_2\ :\ x \longmapsto \sin 2x$ est solution particulière de l'équation $(L_2)\ :\ y'' + y = -3\sin 2x$

Donc les solutions de $(L)$ sont données par :

$$y(x) = \lambda \sin x + \mu \cos x + \frac{1}{2}e^x + \sin 2x\ ,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Les deux propositions suivantes montrent comment l'on peut chercher directement par identification une solution particulière de $(L)$, lorsque le second membre $f$ est le produit d'une exponentielle par un polynôme ou d'une exponentielle par une combinaison linéaire de sinus et cosinus.

**Proposition 4.2.5** — *Soit $(L)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :*

$$ay'' + by' + cy = e^{sx}P(x) \ , \ s \in \mathbb{R} \ , \ P \in \mathbb{R}[X]$$

*et $E_c$ son équation caractéristique. Alors :*

*1 - Si $s$ n'est pas racine de $E_c$, $(L)$ admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow e^{sx}Q(x)$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg Q = \deg P$.*

*2 - Si $s$ est racine simple de $E_c$, $(L)$ admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow e^{sx}Q(x)$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg Q = \deg P + 1$.*

*3 - Si $s$ est racine double de $E_c$, $(L)$ admet une solution particulière de la forme $x \longrightarrow e^{sx}Q(x)$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg Q = \deg P + 2$.*

PREUVE — Soit $n$ le degré de $P$. Cherchons une solution particulière $y_0$ de $(L)$ sous la forme $y_0(x) = e^{sx}Q(x)$ où $Q$ est un polynôme. On a dans ces conditions

$$y_0'(x) = e^{sx}[sQ(x) + Q'(x)] \ , \ y_0''(x) = e^{sx}[s^2Q(x) + 2sQ'(x) + Q''(x)]$$

Donc $y_0$ est solution de $(L)$ si et seulement si :

$$ae^{sx}[s^2Q(x) + 2sQ'(x) + Q''(x)] + be^{sx}[sQ(x) + Q'(x)] + ce^{sx}Q(x) = e^{sx}P(x)$$

Soit :

$$(as^2 + bs + c)Q(x) + (2as + b)Q'(x) + aQ''(x) = P(x) \tag{3}$$

1 - Si $s$ n'est pas racine de $E_c$, $as^2 + bs + c \neq 0$ et il existe un unique polynôme $Q$ de degré $n$ vérifiant $(3)$. Ses coefficients sont déterminés par un système triangulaire de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues.

2 - Si $s$ est racine simple de $E_c$, $as^2 + bs + c = 0$ et $2as + b \neq 0$. Dans ce cas, $Q$ doit vérifier l'équation :

$$(2as + b)Q'(x) + aQ''(x) = P(x)$$

Cette équation détermine $Q'$ de degré $n$ de manière unique, et donc un polynôme $Q$ de degré $n+1$.

3 - Si $s$ est racine double de $E_c$, $as^2 + bs + c = 2as + b = 0$. Dans ce cas, $Q$ doit vérifier l'équation :

$$aQ''(x) = P(x)$$

qui détermine un polynôme $Q$ de degré $n+2$.

EXEMPLE — Résoudre $(L)$ : $y'' - 4y' + 4y = (x^2+1)e^x$.

L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)^2 = 0$. La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par :

$$y_H(x) = (Ax + B)e^{2x} \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière de $(L)$ de la forme $y_P(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$. En reportant cette expression dans $(L)$, on trouve :

$$y_P(x) = (x^2 + 4x + 7)e^x$$

Donc la solution générale de $(L)$ donnée par :

$$y(x) = (Ax + B)e^{2x} + (x^2 + 4x + 7)e^x \ , \ (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

**Proposition 4.2.6** — *Soit $(L)$ l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants :*

$$ay'' + by' + cy = P(x)\cos sx + Q(x)\sin sx\ ,\ s \in \mathbb{R}^*\ ,\ (P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$$

*$(H)$ l'équation homogène associée et $E_c$ son équation caractéristique. Alors :*

*1 - Si $x \longmapsto \cos sx$ et $x \longmapsto \sin sx$ ne sont pas solutions de $(H)$, c'est-à-dire si $is$ n'est pas racine de $E_c$, $(L)$ admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto S(x)\cos sx + T(x)\sin sx$, où $S$ et $T$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $\max(\deg P, \deg Q)$.*

*2 - Si $x \longmapsto \cos sx$ et $x \longmapsto \sin sx$ sont solutions de $(H)$, c'est-à-dire si $is$ est racine simple de $E_c$, $(L)$ admet une solution particulière de la forme $x \longmapsto S(x)\cos sx + T(x)\sin sx$, où $S$ et $T$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à $\max(\deg P, \deg Q) + 1$.*

PREUVE — Nous admettons ce résultat.

EXEMPLE — Résoudre $(L)$ : $y'' + y = 4\cos^3 x = 3\cos x + 4\cos 3x$.

On applique le principe de superposition des solutions en cherchant séparément une solution particulière de chacune des équations :

$$y'' + y = 3\cos x \quad (L_1) \ \text{ et } \ y'' + y = 4\cos 3x \quad (L_2)$$

Pour l'équation $(L_1)$, on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_1(x) = ax\cos x + cx\sin x$$

Pour l'équation $(L_2)$, on cherche une solution particulière de la forme :

$$y_2(x) = \alpha\cos 3x + \beta\sin 3x$$