Chapitre 6 : Géométrie dans l'espace

1 Axiomes de base

Axiomes.
- Trois points non alignés A, B et C définissent un plan, noté ABC, de manière unique.
- Si un plan contient deux points distincts A et B, il contient la droite (AB).
- Si deux plans distincts ont un point en commun, leur intersection est une droite.
- Un plan de l'espace sera donc déterminé entièrement par
  - La donnée de trois points non alignés.
  - La donnée d'une droite et d'un point extérieur à cette droite.
  - Deux droites sécantes.

2 Le parallélisme dans l'espace

2.1 Parallélisme de deux droites

Définition 1 *Deux droites sont dites* ***parallèles*** *si elles sont* ***coplanaires*** *(dans un même plan) et* ***parallèles dans ce plan*** *: elles y sont donc confondues ou sans point communs.*

Remarque. Deux droites de l'espace peuvent n'avoir aucun point commun et n'être pas parallèles.

Proposition 2
- *Par un point de l'espace, il passe une et une seule droite parallèle à une droite donnée.*
- *Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles.*

2.2 Parallélisme d'une droite et d'un plan

Définition 3 *Un plan et une droite sont dits parallèles s'ils n'ont pas de point commun ou si la droite est contenue dans le plan.*

Proposition 4
- *Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, elle est parallèle à ce plan.*
- *Si une droite est parallèle à un plan, toute droite parallèle à la droite donnée et passant par un point du plan est contenue dans ce plan.*
- *Si une droite est parallèle à deux plans sécants, elle est parallèle à leur intersection.*

2.3 Parallélisme de deux plans

Définition 5 *Deux plans sont dits parallèles s'ils n'ont aucun point commun, ou bien s'ils sont confondus.*

Proposition 6
- *Par un point de l'espace, il passe un unique plan parallèle à un plan donné.*
- *Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles.*
- *Un plan sécants à deux plans parallèles les coupent selon deux droites parallèles.*

2.4 Position relative de droites et de plans de l'espace

Proposition 7
- *Deux droites de l'espace peuvent être non coplanaires, donc sans point commun, ou coplanaires auquel cas elles peuvent être parallèles ou sécantes.*
- *Une droite et un plan peuvent être sécants en un point, ou parallèles.*
- *Deux plans peuvent être sécants en une droite ou parallèles.*

3 Orthogonalité et perpendicularité

3.1 Orthogonalité de deux droites

Définition 8
- *Deux droites de l'espace sont dites perpendiculaires si elles sont sécantes et perpendiculaires dans le plan qui les contient.*
- *Deux droites de l'espace sont dites orthogonales si les parallèles à ces droites menées par un point quelconques sont perpendiculaires.*

3.2 Perpendicularité d'une droite et d'un plan

Définition 9 *Une droite et un plan sont dits perpendiculaires si la droite donnée est orthogonale à toutes les droites du plan.*

Proposition 10 *Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est orthogonale à **deux droites sécantes** de ce plan.*

3.3 Projection orthogonale, distance d'un point à un plan

Définition 11 *On appelle projection orthogonale d'un point M sur un plan $\mathcal{P}$, le point N du plan $\mathcal{P}$ tel que la droite (MN) soit perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Cette projection est le point M si et seulement si M est un point de $\mathcal{P}$.*

La longueur MN est la distance du point M au plan $\mathcal{P}$. Elle est nulle si et seulement si M est un point de $\mathcal{P}$.

4 Polyèdres

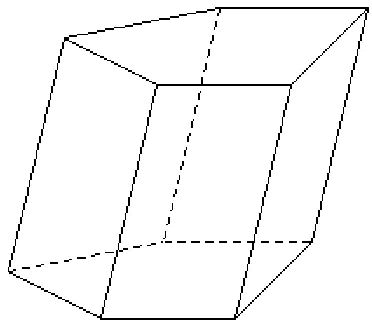
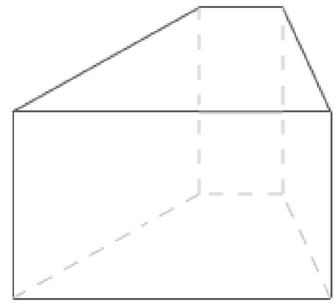
Définition 12 *Par définition, un **polyèdre** est un **solide de l'espace limité par des polygones plans**, appelés **faces** du polyèdre, ayant deux à deux un côté commun, appelé **arête** du polyèdre. Les extrémités des arêtes sont les **sommets** du polyèdre.*

*Un polyèdre est dit **convexe** s'il est situé entièrement dans l'un quelconque des demi espaces défini par le plan de chacune de ses faces.*

4.1 Prisme

Définition 13
- *Un **prisme** est un polyèdre convexe constitué par deux faces parallèles polygonales égales, appelées bases du prisme, et par des parallélogrammes joignant les deux bases. L'ensemble de ces parallélogrammes se nomme la surface latérale du prisme.*
- *Un prisme est dit **droit** lorsque les parallélogrammes des faces latérales sont des rectangles.*

Exemples. Un prisme et un prisme droit :

Définition 14 *La **hauteur** d'un prisme est la distance entre les deux plans de base, c'est à dire la distance entre un point d'une base et l'autre base. La hauteur d'un prisme droit est donc la longueur du côté de l'un des rectangles de la surface latérale, non situé dans une base.*

La mesure du volume d'un prisme est égal au produit de l'aire d'une base par sa hauteur.

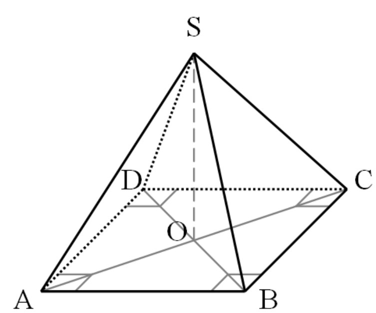
Exemples.

- Un **parallélépipède** est un prisme à 6 faces parallèles deux à deux, chaque face étant un parallélogramme. Un parallélépipède rectangle est un prisme à 6 faces rectangulaires parallèles deux à deux.
- Un **cube** est un parallélépipède rectangle dont chaque face est un carré.

4.2 Pyramiides

Définition 15 *Une **pyramide** est un polyèdre convexe définie par sa base, un polygone convexe, et son sommet S non situé dans le plan de la base. Les faces latérales sont les triangles dont S est un sommet, et dont le côté opposé à S est un des côtés du polygone de la base.*

Exemples.



Définition 16

- *Une pyramide est dite **régulière** si sa base $ABCD$ est un polygone régulier et si la projection orthogonale O du sommet S de la pyramide est le centre du polygone régulier $ABCD$.*
- *La **hauteur** d'une pyramide est la distance de son sommet au plan de sa base.*
- *Le **volume** d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur.*

4.3 Polyèdres réguliers

Définition 17 *Un **polyèdre régulier** est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers identiques.*

Remarques.

- Un cube est un polyèdre régulier, de même qu'un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles équilatéraux.
- On peut démontrer que les faces d'un polyèdre régulier sont des carrés, des triangles équilatéraux, ou des pentagones réguliers.