Correction - AP 1

Suites récurrentes d'ordre 1 - Suites implicites

Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 1

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien définie et $u_n > 0$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Ini. $u_0 = \dfrac{5}{2} > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $1 + u_n \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini. Et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{1+u_n} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Ccl. Par récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_1 = \dfrac{15}{7} = \dfrac{30}{14} < u_0 = \dfrac{5}{2} = \dfrac{35}{14}$.
   $u_2 = \dfrac{43}{15} = \dfrac{86}{30} > u_0 = \dfrac{5}{2} = \dfrac{75}{30}$.
   Donc $u_1 < u_0 < u_2$ et la suite (u_n) n'est pas monotone.

3. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$f'(x) = 4 \times \frac{-1}{(1+x)^2} = -\frac{4}{(1+x)^2} < 0.$$
   Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 5$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$ donc :

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$5 \searrow 1$

4. Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. On résout donc :
$$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{1+x} = x \Leftrightarrow \frac{1+x+4-x(1-x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x^2 = 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$
   Comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 0$. Donc $\ell = \sqrt{5}$. Ainsi, la seule limite finie possible de la suite (u_n) est $\sqrt{5}$.

5. (a) On exprime v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de v_n et w_n :
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n) \\ w_{n+1} &= u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f \circ f(w_n). \end{aligned}$$

La fonction g est donc définie par :

$$\begin{aligned} g(x) &= f\circ f(x) = f(f(x)) = 1 + \frac{4}{1+f(x)} = 1 + \frac{4}{1+1+\frac{4}{1+x}} \\ &= 1 + \frac{4}{\frac{2(1+x)+4}{1+x}} = 1 + \frac{4(1+x)}{2(1+x)+4} = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x}. \end{aligned}$$

(b) g est dérivable car c'est une fonction rationnelle et :

$$g'(x) = \frac{2(3+x)-2(1+x)}{(3+x)^2} = \frac{4}{(3+x)^2} > 0.$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On cherche ensuite le signe de $g(x) - x$:

$$g(x) - x = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x} - x = \frac{3+x+2+2x-3x-x^2}{3+x} = \frac{5-x^2}{3+x} = \frac{(\sqrt{5}-x)(\sqrt{5}+x)}{3+x}.$$

Or sur $\mathbb{R}_+$, on obtient immédiatement $3+x>0$ et $\sqrt{5}+x>0$, donc $g(x)-x$ est du signe de $\sqrt{5}-x$:

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	3
$g(x)-x$		$+$	0	$-$	

Enfin, g est continue et strictement croissante sur $[0,\sqrt{5}]$ et sur $[\sqrt{5},+\infty[$ donc :

$$g([0,\sqrt{5}]) = [g(0), g(\sqrt{5})] = [\frac{5}{3};\sqrt{5}] \subset [0,\sqrt{5}]$$

et

$$g([\sqrt{5},+\infty[) = \left[g(\sqrt{5}), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [\sqrt{5},3[\subset[\sqrt{5},+\infty[$$

donc les intervalles $[0,\sqrt{5}]$ et $[\sqrt{5},+\infty[$ sont bien stables par g.

(c) La suite (v_n) vérifie $v_0 = u_0 = \frac{5}{2}$. Comparons le à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > \frac{20}{4} = 5$$

donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante, $\frac{5}{2} > \sqrt{5}$.

Comme l'intervalle $[\sqrt{5},+\infty[$ est stable par g, on montre alors par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n \geq \sqrt{5}$. On en déduit alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n \leq 0$$

d'après la question 5.(b). La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{5}$ donc converge. Or le seul point fixe de g sur $[\sqrt{5}, +\infty[$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de $g(x) - x = 0$ obtenues à la question 5.(b) dans le tableau de signe de $g(x) - x$) donc (v_n) converge vers $\sqrt{5}$.

D'autre part, on a vu que $w_0 = u_1 = \dfrac{15}{7}$, qu'on compare à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49} < 5 = \frac{49 \times 5}{49} = \frac{245}{49}$$

donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, $0 < \dfrac{15}{7} < \sqrt{5}$.

Comme l'intervalle $[0, \sqrt{5}]$ est stable par g, on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_n \leq \sqrt{5}$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = g(w_n) - w_n \geq 0$$

d'après la question 5.(b). La suite (w_n) est donc croissante et majorée par $\sqrt{5}$ donc converge. Or le seul point fixe de g sur $[0, \sqrt{5}]$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de $g(x) - x = 0$ obtenues à la question 5.(b) dans le tableau de signe de $g(x) - x$) donc (w_n) converge vers $\sqrt{5}$.

(d) Comme les suites (u_{2n}) (termes pairs de la suite (u_n)) et (u_{2n+1}) (termes impairs de la suite (u_n)) convergent vers la même limite, on en déduit que la suite (u_n) converge vers cette limite. Donc (u_n) converge vers $\sqrt{5}$.

Exercice 2 (EDHEC 2023)

1. Au plus simple, on peut proposer la fonction nulle.

   Si on veut une fonction un peu plus originale, on peut chercher dans le champ des fonctions affines. Si $f(x) = ax + b$, $\quad f(x) - f(y) = a(x - y)$ donc $|f(x) - f(y)| = |a|\ |x - y|$. Il suffit donc de prendre a tel que $|a| < 1$.

   On peut par exemple proposer l'application affine définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\dfrac{1}{3}\ x + 4$.

2. Soit f une fonction K-contractante. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq K\,|x - x_0|\,.$$

   Donc, par le théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

   Donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ et f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

   Donc f est bien continue sur $\mathbb{R}$.

3. Supposons que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions distinctes x_1 et x_2.

   La propriété $(*)$ donne :

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

   Comme $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$, on obtient :

$$|x_1 - x_2| \leq K|x_1 - x_2| \Rightarrow 1 \leq K$$

   car $|x_1 - x_2| > 0$ (car $x_1 \neq x_2$). Or $K \in]0, 1[$ et on abouti donc à une contradiction.

   Ainsi, l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "$|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \, |u_1 - u_0|$".

Ini. $|u_1 - u_0| \leq K^0 |u_1 - u_0|$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K|u_{n+1} - u_n|.$$

Or, avec l'hypothèse de récurrence, on obtient :

$$|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K \times K^n |u_1 - u_0| = K^{n+1} |u_1 - u_0|.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \, |u_1 - u_0|$.

(b) Posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a donc $|v_n| \leq K^n |u_1 - u_0|$ avec la question précédente.
La série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} K^n$ est convergente car $0 < K < 1$. Donc la série de terme général $K^n |u_1 - u_0|$ converge et, par le critère de majoration des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |v_n|$ converge.
La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ est donc absolument convergente et donc convergente.

Considérons S_n la somme partielle de rang n de la série convergente $\sum_{k=0}^{n} v_k$. Par télescopage,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0.$$

Donc $u_n = S_n + u_0$ et, comme la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} v_n$ converge, (S_n) converge vers un réel ℓ.
Donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell + u_0$.
On a bien prouver que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers un réel a.

(c) Comme f est continue, on a par passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, que $a = f(a)$.
L'équation $f(x) = x$ admet donc une solution $a = \ell + u_0$ et elle est unique puisqu'il ne peut y en avoir plus qu'une (question 2).

5. (a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|u_{i+1} - u_i| \leq K^i \, |u_1 - u_0|$.
Donc, en sommant, on obtient bien :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0| \, .$$

(b) On commence par remarquer que $u_{n+p} - u_n = \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i)$. Donc :

$$\begin{aligned}
|u_{n+p} - u_n| &= \left| \sum_{i=n}^{n+p-1} (u_{i+1} - u_i) \right| \\
&\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times |u_1 - u_0| = |u_1 - u_0| \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i
\end{aligned}$$

Or d'après le cours (somme géométrique), on a :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} K^i = K^n \times \frac{1-K^{(n+p-1)-n+1}}{1-K} = K^n \times \frac{1-K^p}{1-K}.$$

On a bien l'inégalité : $|u_{n+p}-u_n| \leq K^n \times \dfrac{1-K^p}{1-K}\ |u_1-u_0|$.

(c) L'inégalité précédente étant vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, on fait tendre p vers $+\infty$. On sait que $\lim\limits_{p \to +\infty} u_{n+p} = a$ et $\lim\limits_{p \to +\infty} K^p = 0$ donc, on obtient l'inégalité :

$$|a-u_n| \leq \frac{K^n}{1-K} \times |u_1-u_0|\,.$$

6. (a) $t \mapsto 1+e^t$ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et strictement positive, donc, par quotient, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.
Pour dériver, on peut écrire $f(t) = \left(1+e^t\right)^{-1}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -e^t\left(1+e^t\right)^{-2} = -\frac{e^t}{(1+e^t)^2} \\ f''(t) &= \left(-e^t\left(1+e^t\right)^{-2}\right) - 2\left(-e^t\right)^2\left(1+e^t\right)^{-3} \\ &= \left[-e^t(1+e^t)+2e^{2t}\right]\ \frac{1}{(1+e^t)^3} \\ &= e^t(e^t-1)\ \frac{1}{(1+e^t)^3} \end{aligned}$$

(b) $f''(t)$ est du signe de e^t-1 et $e^t \geq 1 \iff t \geq 0$. On peut dresser le tableau des variations de f' sur $\mathbb{R}$:

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(t)$		$-$	0	$+$	
f'	0	$\searrow$	$f'(0)$	$\nearrow$	0

Pour les limites :

- en $+\infty$, $f'(t) \sim -\dfrac{1}{e^t} \to 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = 0$.
- en $-\infty$, le numérateur de $f'(t)$ tend vers 0 et son dénominateur tend vers 1 donc $\lim\limits_{t \to -\infty} f'(t) = 0$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t)$ est négatif donc $|f'(t)| = -f'(t)$ et le maximum de $|f'(t)|$ sur $\mathbb{R}$ est $M = -f'(0) = \dfrac{1}{4}$.

On a donc bien : $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq \dfrac{1}{4}$.

(c) f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f'(t)| \leq \dfrac{1}{4}$. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{4}\ |x-y|.$$

Ainsi, f est bien $\dfrac{1}{4}$-contractante.

(d) Par définition de la suite (u_n), on peut appliquer les résultats de la question 4 (car f est K-contractante avec $K = \frac{1}{4} \in]0,1[$). Donc la suite (u_n) converge vers un réel a.

(e) La fonction `Python` qui calcule le terme d'indice n d'une suite est un grand classique. On complète :

```python
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(1,n+1):
        u = 1/(1+np.exp(u))
    return u
```

(f) On a vu à la question 5.(c) que :

$$|u_n - a| \leq \frac{K^n}{1-K}\,|u_1 - u_0|$$

Ici $K = \frac{1}{4}$ donc $\frac{K^n}{1-K} = \frac{1}{4^n} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3 \times 4^{n-1}}$.
De plus, $u_1 = f(0) = \frac{1}{2}$ donc $|u_1 - u_0| = \frac{1}{2}$. Ainsi,

$$|u_n - a| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 \times 4^{n-1}} = \frac{2}{3 \times 4^n}.$$

On veut une valeur approchée de a à 10^{-3} près, donc il suffit d'avoir $\frac{2}{3 \times 4^n} \leq 10^{-3}$:

$$\frac{2}{3 \times 4^n} \leq 10^{-3} \iff 4^n \geq \frac{2 \times 10^3}{3}$$

(g) Poursuivons le calcul précédent :

$$\begin{aligned} 4^n \geq \frac{2 \times 10^3}{3} &\iff n\ln(4) \geq \ln(2) + 3\ln(10) - \ln(3) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(2) + 3\ln(10) - \ln(3)}{\ln(4)} \end{aligned}$$

On prendra donc :

$$n = \left\lfloor \frac{\ln(2) + 3\ln(10) - \ln(3)}{\ln(4)} \right\rfloor + 1.$$

On peut donc proposer d'ajouter les lignes suivantes au script `Python` précédent :

```python
n = np.floor((np.log(2)+3*np.log(10)-np.log(3))/np.log(4))+1
print(suite(n))
```

On peut aussi faire moins de maths et une boucle :

```python
n = 0
while 4**n < 2000/3:
    n = n+1
print(suite(n))
```

Dans les deux cas on obtient l'affichage suivant :

```
0.401384704466
```

Suites implicites

Exercice 3

1. On applique le théorème de la bijection :

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est polynomiale, donc continue.
   - f_n est également dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
   $$f_n'(x) = -1 - nx^{n-1} < 0.$$
   Donc f_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
   - On a $f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = -\infty$.

   D'après le théorème de la bijection, f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, 1]$. Puisque $0 \in]-\infty, 1]$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note dans la suite u_n.

2. (a) On a $f_n(0) = 1$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(1) = -1$. Donc $f_n(0) > f_n(u_n) > f_n(1)$. Comme f_n est strictement décroissante, $0 < u_n < 1$ donc u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

   (b) Puisque $u_n \in]0, 1[$, on a $u_n^{n+1} \leq u_n^n$, et donc :
   $$f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} \geq 1 - u_n - u_n^n = f_n(u_n) = 0.$$
   Puisque f_{n+1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et que
   $$f_{n+1}(u_n) \geq 0 = f_{n+1}(u_{n+1}),$$
   on en déduit que $u_n \leq u_{n+1}$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (u_n) est croissante.

   (c) La suite (u_n) est croissante et majorée (car $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Par le théorème des suites monotones, on peut donc conclure que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ finie. De plus on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$
   Par passage à la limite dans une inégalité, on obtient donc que $0 \leq \ell \leq 1$.

   (d) Par l'absurde, supposons que $0 \leq \ell < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$f_n(u_n) = 0 \quad \text{soit} \quad 1 - u_n - u_n^n = 0.$$
   (u_n) étant croissante et convergente vers ℓ, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 \leq u_n \leq \ell, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq u_n^n \leq \ell^n.$$
   Or par hypothèse $0 \leq \ell < 1$, donc on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \ell^n = 0$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n^n = 0$. Ainsi tous les termes de l'égalité $1 - u_n - u_n^n = 0$ convergent. Par passage à la limite, on en déduit que :
   $$1 - \ell - 0 = 0 \quad \text{soit encore } \ell = 1.$$
   D'où une contradiction puisque $\ell < 1$ par hypothèse. On peut donc conclure que $\ell = 1$.

3. (a) Puisque $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $v_n = 1 - u_n \in]0, 1[$ et $\ln(v_n)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus on a $1 - u_n - u_n^n = 0$ et donc :
   $$\ln(v_n) = \ln(1 - u_n) = \ln(u_n^n) = n \ln(u_n) = n \ln(1 + (u_n - 1)).$$
   Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - 1 = 0$, on a :
   $$\ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n \to +\infty}{\sim} u_n - 1 = -v_n.$$
   D'où finalement $\ln(v_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} -nv_n$.

(b) On a $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0^+$, donc $\lim_{n\to+\infty} \ln(v_n) = -\infty$. D'autre part, on a $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{-\ln(v_n)}{nv_n} = 1$ et on obtient $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right) = 0$. Par opération sur les limites, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a $-\ln(v_n) > 0$ et $nv_n > 0$, d'où :

$$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n)) - \ln(n) - \ln(v_n)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1.$$

On a donc finalement :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 = 0.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$ par croissances comparées, d'où par composition des limites :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} = 0.$$

On a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$, et donc $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

(c) On a montré que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -nv_n$ et que $\ln(v_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(n)$.

Donc, on a $nv_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, soit encore $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.

4. La série $\sum v_n$ est à termes positifs d'après les questions précédentes. On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$;
- $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ pour tout $n \geq 3$;
- la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n$ diverge.

De même, la série $\sum v_n^2$ est à termes positifs, et on a :

- $v_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)^2}{n^2}$;
- $\frac{\ln(n)^2}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ puisque $\frac{\frac{\ln(n)^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} \to 0$ par croissances comparées ;
- la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est convergente (série de Riemann d'exposant $\alpha = 3/2 > 1$).

Par théorème de comparaison, on en déduit que $\sum v_n^2$ converge.

Exercice 4

1. (a) f_k est dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ car $x \mapsto \ln(x)$, $x \mapsto x^k$ et $x \mapsto x-1$ le sont, et $x-1 \neq 0$. De plus :

$$f_k'(x) = \frac{\frac{k(\ln(x))^{k-1}}{x}(x-1) - (\ln(x))^k}{(x-1)^2} = \frac{\ln(x)^{k-1}}{(x-1)^2} \times \frac{k(x-1) - x\ln(x)}{x}.$$

(b) On considère le taux d'accroissement :

$$\frac{f_k(x) - f_k(1)}{x-1} = \frac{\ln(x)^k}{(x-1)^2} = \left(\frac{\ln(x)}{x-1}\right)^2 \times \ln(x)^{k-2}.$$

Or $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \ln'(1) = 1$ car c'est le taux d'accroissement de la fonction logarithme en 1 (qui est dérivable en ce point). Donc :

- Si $k=2$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f_k(x) - f_k(1)}{x-1} = 1$ donc f_2 est dérivable et $f_2'(1) = 1$.
- Si $k \geq 3$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f_k(x) - f_k(1)}{x-1} = 0$ donc f_k est dérivable et $f_k'(1) = 0$.

(c) φ_k est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\varphi_k'(x) = k - \frac{x}{x} - \ln(x) = k - 1 - \ln(x)$$

qui est strictement positive avant e^{k-1}, nulle en e^{k-1} et strictement négative après. Donc φ_k est strictement croissante sur $[0, e^{k-1}]$ et strictement décroissante sur $[e^{k-1}, +\infty[$.

(d) La fonction φ_k est continue et strictement croissante sur $]1, e^{k-1}]$ donc réalise une bijection de $]1, e^{k-1}]$ dans $]\varphi_k(1), \varphi_k(e^{k-1})] =]0, e^{k-1} - k]$.
Or $0 \notin]0, e^{k-1} - k]$ (φ_k est strictement croissante sur l'intervalle donc $e^{k-1} - k > 0$), donc l'équation $\varphi_k(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $]1, e^{k-1}]$.

La fonction φ_k est continue et strictement décroissante sur $]e^{k-1}, +\infty[$ donc réalise une bijection de $]e^{k-1}, +\infty[$ dans $]\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi_k(x), \varphi_k(e^{k-1})[=]-\infty, e^{k-1} - k[$ car :

$$\varphi_k(x) = kx - k - x\ln(x) = -x\ln(x)\left(1 + \frac{k}{x\ln(x)} - \frac{k}{\ln(x)}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

par produit, quotient et somme de limites.
Or $0 \in]-\infty, e^{k-1} - k[$ (on a vu que $e^{k-1} - k > 0$), donc l'équation $\varphi_k(x) = 0$ admet une unique solution sur $]e^{k-1}, +\infty[$.
Cela fait donc au total une unique solution a_k sur $]1, +\infty[$, qui vérifie $a_k \geq e^{k-1}$.

(e) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $x \neq 1$, on a : $f_k'(x) = \frac{\ln(x)^{k-1}}{(x-1)^2} \times \frac{\varphi_k(x)}{x}$. On en déduit les variations de f_k :

- Si k est pair et $k \geq 2$:

x	0		1		a_k		$+\infty$
$\ln(x)^{k-1}$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\varphi_k(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k'(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$-\infty$	↗	0	↗		↘	0

- Si k est impair et $k \geq 3$:

x	0		1		a_k		$+\infty$
$\ln(x)^{k-1}$	‖	$+$	0	$+$		$+$	
$\varphi_k(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	0	↗		↘	0

2. (a) On a déjà vu que $e^{k-1} \leq a_k$. Pour l'autre inégalité, comme a_k est implicite, on compose par φ_k :
$$\varphi_k(e^k) = k(e^k - 1) - e^k \times k = -k < 0 \quad \text{et} \quad \varphi_k(a_k) = 0$$
donc $\varphi_k(e^k) \leq \varphi_k(a_k)$. Or φ_k est strictement décroissante sur $[e^{k-1}, +\infty[$ donc on obtient $e^k \geq a_k$. Finalement, on a bien $e^{k-1} \leq a_k \leq e^k$.
Par passage à la limite dans la seule inégalité de gauche, a_k diverge vers $+\infty$ lorsque k tend vers $+\infty$.

(b) Par définition de a_k, on sait que :
$$\varphi_k(a_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k(a_k - 1) - a_k \ln(a_k) = 0.$$
On remplace a_k par $e^k(1 + b_k)$, et on obtient :
$$\begin{aligned}
& k(e^k(1+b_k) - 1) = e^k(1+b_k) \times \ln(e^k(1+b_k)) \\
\Rightarrow\ & k(e^k(1+b_k) - 1) = e^k(1+b_k) \times (\ln(e^k) + \ln(1+b_k)) \\
\Rightarrow\ & k(e^k(1+b_k) - 1) = e^k(1+b_k) \times (k + \ln(1+b_k)) \\
\Rightarrow\ & ke^k(1+b_k) - k = ke^k(1+b_k) + e^k(1+b_k)\ln(1+b_k) \\
\Rightarrow\ & -k = e^k(1+b_k)\ln(1+b_k) \\
\Rightarrow\ & -ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k).
\end{aligned}$$

(c) Avec la question précédente, on a :
$$\ln(1+b_k) = \frac{-ke^{-k}}{1+b_k} = \frac{-ke^{-k}}{\frac{a_k}{e^k}} = \frac{-k}{a_k}.$$

Or $a_k \geq e^{k-1}$ d'après la question 2.(a). Donc, par passage à l'inverse puis en multipliant par $-k < 0$:

$$a_k \geq e^{k-1} \Rightarrow \frac{1}{a_k} \leq e^{1-k} \Rightarrow \frac{-k}{a_k} \geq -ke^{1-k} \Rightarrow \ln(1+b_k) \geq -ke^{1-k}.$$

On va alors chercher la limite de $\ln(1+b_k)$ par encadrement. On remarque que :

$$-ke^{1-k} = -e \times ke^{-k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées. Pour avoir l'autre coté, on essaie de majorer $\ln(1+b_k)$ par 0. D'après la définition de b_k :

$$\ln(1+b_k) = \ln\left(\frac{a_k}{e^k}\right) \leq 0$$

car ln est croissante et $\dfrac{a_k}{e^k} \leq 1$ en divisant l'inégalité de droite de la question 2.(a) par $e^k > 0$. On en déduit donc que

$$0 \geq \ln(1+b_k) \geq -ke^{1-k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc par encadrement et continuité de exp,

$$\ln(1+b_k) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{donc} \quad 1+b_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 \quad \text{donc} \quad b_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1-1 = 0.$$

Enfin, pour trouver un équivalent de b_k, on revient à l'égalité de la question précédente :

$$-ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k).$$

On vient de voir que $b_k \to 0$, donc $(1+b_k) \sim 1$ et $\ln(1+b_k) \sim b_k$. Par produit des équivalents,

$$-ke^{-k} = (1+b_k)\ln(1+b_k) \sim b_k.$$

Donc $b_k \sim -ke^{-k}$.

(d) On isole le $o()$ pour se ramener à une limite :

$$a_k = e^k - k + o(k) \Leftrightarrow a_k - e^k + k = o(k) \Leftrightarrow \frac{a_k - e^k + k}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Or $a_k - e^k = e^k b_k$, donc :

$$\frac{a_k - e^k + k}{k} = \frac{b_k e^k + k}{k} = \frac{b_k e^k}{k} + 1.$$

Or on a vu que $b_k \sim -ke^{-k}$ donc $\dfrac{b_k e^k}{k} \sim \dfrac{-ke^{-k}e^k}{k} = -1$. On en déduit que

$$\frac{b_k e^k}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -1 \quad \text{puis} \quad \frac{a_k - e^k + k}{k} = \frac{b_k e^k}{k} + 1 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après l'équivalence écrite au début de la question, on a donc bien $a_k = e^k - k + o(k)$.