Correction - AP 12

Probabilité d'une panne et durée de fonctionnement d'un système

ESSEC II 2016

Première partie : Propriétés asymptotiques d'une variable aléatoire

1. (a) Décomposons l'événement $[X > j-1]$ en union de 2 événements incompatibles:

$$[X > j-1] = [X = j] \cup [X > j]$$

(car les valeurs strictement supérieures $j-1$ sont la valeur j et les valeurs strictement supérieures à j). Ainsi,

$$P(X > j-1) = P(X = j) + P(X > j) \Leftrightarrow P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j)$$

(b) Soit p un entier naturel non nul,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) &= \sum_{j=1}^{p} jP(X > j-1) - \sum_{j=1}^{p} jP(X > j) \qquad \text{(d'après 1.(a))} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} (k+1)P(X > k) - \sum_{j=1}^{p} jP(X > j) \qquad \text{(en posant } k = j-1\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} kP(X > k) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) - \sum_{j=1}^{p} jP(X > j) \\
&= \sum_{k=0}^{p-1} kP(X > k) - \sum_{j=1}^{p} jP(X > j) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{p-1} kP(X > k) - \sum_{j=1}^{p-1} jP(X > j) - pP(X > p) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k) \\
&= -pP(X > p) + \sum_{k=0}^{p-1} P(X > k)
\end{aligned}$$

2. (a) i. X admet une espérance donc d'après la définition de l'espérance, $\sum kP(X = k)$ converge absolument donc converge.

ii. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X=k) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) - \sum_{k=1}^{p} kP(X=k) \\
&= E(X) - \sum_{k=1}^{p} kP(X=k) \\
&\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} E(X) - E(X) = 0
\end{aligned}$$

iii. On a :

$$\begin{aligned}
pP(X>p) &= pP\left(\bigcup_{k=p+1}^{+\infty}[X=k]\right)\\
&= p\sum_{k=p+1}^{+\infty}P(X=k) \qquad \text{(événements incompatibles)}\\
&= \sum_{k=p+1}^{+\infty}pP(X=k)\\
&\leq \sum_{k=p+1}^{+\infty}kP(X=k) \qquad \text{(sommation d'inégalités)}
\end{aligned}$$

car si $k \in [\![p+1,+\infty[\![$ alors $p \leq k$ donc $pP(X=k) \leq kP(X=k)$ (car $P(x=k) \geq 0$).
On a donc :

$$0 \leq pP(X>p) \leq \sum_{k=p+1}^{+\infty}kP(X=k) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc par encadrement, $\lim\limits_{p\to+\infty} pP(X>p) = 0$.

iv. D'après 1.(b), on a :

$$\sum_{j=0}^{p-1}P(X>j) = \sum_{j=1}^{p}jP(X=j) + pP(X>p)$$

qui admet donc bien une limite lorsque p tend vers $+\infty$ comme somme de deux suites convergentes d'après 2.(a)i. et 2.(a) iii.

v. On fait tendre p vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty}P(X>j) = \sum_{j=1}^{+\infty}jP(X=j) + \lim_{p\to+\infty}pP(X>p) = \mu + 0 = \mu$$

(b) i. On a :

$$\begin{aligned}
v_{p+1} - v_p &= \sum_{j=0}^{p}P(X>j) - \sum_{j=0}^{p-1}P(X>j)\\
&= \sum_{j=0}^{p-1}P(X>j) + P(X>p) - \sum_{j=0}^{p-1}P(X>j)\\
&= P(X>p) \geq 0
\end{aligned}$$

La suite (v_p) est croissante (donc admet une limite finie ou tend vers $+\infty$).

ii. D'après la question 1.(b), on a :

$$\sum_{j=1}^{p}jP(X=j) = \sum_{j=0}^{p-1}P(X>j) - pP(X>p) = v_p - pP(X>p) \leq v_p,$$

car $pP(X>p) \geq 0$.
D'autre part, comme (v_p) est croissante donc sous sa limite, on a :

$$v_p \leq \sum_{j=0}^{+\infty}P(X>j).$$

On a donc :

$$\sum_{j=1}^{p} jP(X=j) \leq \sum_{j=0}^{+\infty} P(X>j).$$

iii. La série de terme général $jP(X=j)$ est croissante (en tant que série à terme général positif) et majorée d'après la question 2.(b)ii. donc elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Elle est donc aussi absolument convergente car à termes positifs. Par définition de l'espérance, X admet bien une espérance.

(c) D'après la question 2.(a), si X admet une espérance alors la série de terme général $P(X>j)$ converge. D'après la question 2.(b), la réciproque est vraie. Ainsi, les propriétés sont bien équivalentes.

3. (a) D'après la question 1.(a), on a pour tout $j \geq 1$:

$$P(X=j) = P(X>j-1) - P(X>j) = \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha}.$$

Ainsi,

- Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} j \leq j+1 \quad &\Rightarrow \quad j^\alpha \leq (j+1)^\alpha \quad \text{(croissance de } x \mapsto x^\alpha \text{ sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{j^\alpha} \geq \frac{1}{(j+1)^\alpha} \quad \text{(décroissance de l'inverse sur } \mathbb{R}_+^*) \\ &\Rightarrow \quad P(X=j) \geq 0. \end{aligned}$$

- Pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{N} P(X=j) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} \right) = 1 - \frac{1}{(N+1)^\alpha} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On a donc $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} P(X=j) = 1$.

On définit donc bien une loi de probabilité.

(b) D'après la question 2.(c), on sait que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X>j)$ converge. Or :

$$P(X>j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha} \sim \frac{1}{j^\alpha}.$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann qui converge si et seulement si $\alpha > 1$. Donc par théorème de comparaison, X admet une espérance si et seulement si $\alpha > 1$.

(c) Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X=j) &= \frac{1}{j^\alpha} - \frac{1}{(j+1)^\alpha} = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{(j+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{\left(j(1+\frac{1}{j})\right)^\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{j^\alpha}{j^\alpha(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right). \end{aligned}$$

(d) i. f est définie (car $1+x>0$ sur $[0,1]$) et dérivable sur $[0,1]$ comme composée et somme de fonctions usuelles dérivables sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{-\alpha-1} - \alpha = \alpha\left[\frac{1}{(1+x)^{\alpha+1}} - 1\right] = \alpha\frac{1-(1+x)^{\alpha+1}}{(1+x)^{\alpha+1}}.$$

Ainsi, comme $\alpha > 0$ et $x \in [0,1]$, $f'(x)$ est du signe de $1-(1+x)^{\alpha+1} \leq 0$ car $1+x \geq 1$ donc $(1+x)^{\alpha+1} \geq 1^{\alpha+1} = 1$. Donc f est décroissante sur $[0,1]$.

ii. On sait par décroissance de f que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(0) = 0$. On pose alors $x = \frac{1}{j} \in [0,1]$ car $j \geq 1$ donc $0 \leq \frac{1}{j} \leq 1$. On obtient :

$$1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} - \alpha\frac{1}{j} \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} \leq \frac{\alpha}{j}$$

Ainsi, d'après 3.(c),

$$\frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha}\right) \leq \frac{1}{j^\alpha}\frac{\alpha}{j} = \frac{\alpha}{j^{\alpha+1}}.$$

(e) On remarque que $X = \frac{1}{j} \underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi, par développement limité d'ordre 2 on a :

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{j}\right)^\alpha} = \left(1+\frac{1}{j}\right)^{-\alpha} = 1 - \alpha\frac{1}{j} + \frac{-\alpha(-\alpha-1)}{2}\frac{1}{j^2} + o\left(\frac{1}{j^2}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} j^{\alpha+1}P(X=j) &= \frac{j^{\alpha+1}}{j^\alpha}\left(1 - 1 + \alpha\frac{1}{j} + \frac{\alpha(-\alpha-1)}{2}\frac{1}{j^2} + o\left(\frac{1}{j^2}\right)\right) \\ &= j\left(\alpha\frac{1}{j} + \frac{\alpha(-\alpha-1)}{2}\frac{1}{j^2} + o\left(\frac{1}{j^2}\right)\right) = \alpha + \frac{\alpha(-\alpha-1)}{2}\frac{1}{j} + o\left(\frac{1}{j}\right) \\ &\underset{j\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha \end{aligned}$$

(f) D'après la question précédente, comme $\alpha > 0$, on obtient :

$$j^{\alpha+1}P(X=j) \sim \alpha \Leftrightarrow P(X=j) \sim \alpha\frac{1}{j^{\alpha+1}} \Leftrightarrow j^2P(X=j) \sim \alpha\frac{1}{j^{\alpha-1}}.$$

On reconnait le terme général d'une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha - 1 > 1 \Leftrightarrow \alpha > 2$.

Ainsi X admet une variance si et seulement si X admet un moment d'ordre 2, si et seulement si la série de terme général $j^2P(X=j)$ converge absolument, si et seulement si $\alpha > 2$ par théorème de comparaison avec la série de Riemann ci-dessus.

Deuxième partie : Étude de la probabilité de panne un jour donné

4. (a) On a l'égalité d'événements $A_1 = [X_1 = 1]$ car l'événement A_1 signifie qu'un composant tombe en panne à l'instant 1 (premier instant), il s'agit forcément du premier composant puisqu'aucun composant n'a pu tomber en panne précédemment. Ainsi,

$$P(A_1) = P(X_1 = 1) \Leftrightarrow u_1 = p_1.$$

(b) i. On décompose l'événement A_2 sur le SCE $(A_1, \overline{A_1})$:

$$A_2 = (A_1 \cap A_2)\bigcup(\overline{A_1} \cap A_2).$$

- L'événement $A_1 \cap A_2$ signifie qu'un composant est tombé en panne à l'instant 1 (forcément le premier composant) et un composant est tombé en panne à l'instant 2 (forcément le deuxième composant); ainsi $A_1 \cap A_2 = [X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]$.
- L'événement $\overline{A_1} \cap A_2$ signifie que le premier composant tombe en panne à l'instant 2 donc $\overline{A_1} \cap A_2 = [X_1 = 2]$.

On a bien :

$$A_2 = [X_1 = 2] \bigcup ([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) .$$

ii. Les événements de l'union ci-dessus sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} u_2 = P(A_2) &= P(X_1 = 2) + P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) \\ &= P(X_1 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) \quad \text{(par indép. de } X_1 \text{ et } X_2\text{)} \\ &= p_2 + p_1^2 \quad \text{(car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont même loi)} \end{aligned}$$

(c) i. On sait que (X_i) est une suite de variables mutuellement indépendantes donc X_1, $\tilde{X}_1 = X_2$, $\tilde{X}_2 = X_3$,.... sont mutuellement indépendantes par lemme des coalitions. De plus, d'après l'énoncé, $\forall i \geq 1$, $\tilde{X}_i = X_{i+1}$ a même loi que X_1.

ii. Soit $k < n$. On sait d'après l'énoncé que l'événement A_n signifie qu'un composant tombe en panne le jour n c'est-à-dire :

$$A_n = \bigcup_{j \geq 1} [T_j = n]$$

donc par distributivité de l'union par rapport à l'intersection,

$$A_n \cap [X_1 = k] = \bigcup_{j \geq 1} [X_1 = k] \cap [T_j = n] = \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [T_j = n],$$

car $[X_1 = k] \cap [T_1 = n] = [X_1 = k] \cap [X_1 = n] = \emptyset$. En poursuivant le calcul,

$$\begin{aligned} A_n \cap [X_1 = k] &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [k + X_2 + X_3 + ... + X_j = n] \\ &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [X_2 + X_3 + ... + X_j = n - k] \\ &= \bigcup_{j \geq 2} [X_1 = k] \cap [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_{j-1} = n - k] \\ &= \bigcup_{j \geq 1} [X_1 = k] \cap [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k] \qquad \text{(chgt d'indice)} \\ &= [X_1 = k] \cap \left(\bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k] \right) \end{aligned}$$

iii. Pour tout $1 \leq k < n$,

$$\begin{aligned} P_{[X_1 = k]}(A_n) &= \frac{P(A_n \cap [X_1 = k])}{P(X_1 = k)} \\ &= \frac{P\left([X_1 = k] \cap \bigcup_{j \geq 1} [\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k] \right)}{P(X_1 = k)} \qquad \text{(d'après 4.(c)ii.)} \\ &= \frac{P(X_1 = k) \sum_{j \geq 1} P(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k)}{P(X_1 = k)} \end{aligned}$$

par indépendance des événements de l'intersection (d'après 4.(c)i. et par lemme des coalitions) et incompatibilité 2 à 2 des év. de l'union). En simplifiant, on obtient :

$$P_{[X_1 = k]}(A_n) = \sum_{j \geq 1} P(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j = n - k) = \sum_{j \geq 1} P(T_j = n - k)$$

car $\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + ... + \tilde{X}_j$ a même loi que T_j en tant que somme de variables indépendantes, toutes de même loi que X_1. Finalement, par incompatibilité,

$$P_{[X_1 = k]}(A_n) = P\left(\bigcup_{j \geq 1} (T_j = n - k) \right) = P(A_{n-k})$$

(d) Par formule des probabilités totales sur le SCE $(X_1 = k)_{k\geq 1}$, on a :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P_{[X_1=k]}(A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(A_n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(A_n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} 0 \end{aligned}$$

car si $k > n$, un composant ne peut pas tomber en panne à l'instant n alors que le premier composant tombe en panne à l'instant $k > n$. Donc, en sortant le n-ième terme :

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P(X_1 = k)P(A_{n-k}) + P(X_1 = n)P_{(X_1=n)}(A_n) \quad \text{(d'après 4.(c)iii.)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} p_k u_{n-k} + p_n \times 1 \\ &= p_1u_{n-1} + p_2u_{n-2} + ... + p_{n-1}u_1 + p_nu_0 \quad (\text{car } u_0 = 1) \end{aligned}$$

5. (a) Pour tout entier $k > 0$,

$$\begin{aligned} P(X_1 > k) &= \sum_{j=k+1}^{+\infty} P(X_1 = j) = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \lambda(1-\lambda)^{j-1} \\ &= \lambda\sum_{i=k}^{+\infty}(1-\lambda)^i = \lambda(1-\lambda)^k \times \frac{1}{1-(1-\lambda)} = (1-\lambda)^k. \end{aligned}$$

(b) Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_{(X_1>k)}(X_1 = k+1) = \frac{P([X_1 > k] \cap [X_1 = k+1])}{P(X_1 > k)} = \frac{P(X_1 = k+1)}{P(X_1 > k)}$$

car $[X_1 = k+1] \subset [X_1 > k]$. Ainsi,

$$P_{[X_1>k]}(X_1 = k+1) = \frac{\lambda(1-\lambda)^k}{(1-\lambda)^k} = \lambda.$$

(c) Démontrer par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathscr{P}(n)$: "$P(A_n) = \lambda$".

Ini. $P(A_1) = P(X_1 = 1) = \lambda(1-\lambda)^0 = \lambda$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Calculons $P(A_{n+1})$:

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) = u_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} p_k u_{n+1-k} \quad \text{(d'après 4.(d))} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_k u_{n+1-k} + p_{n+1}u_0 = \sum_{k=1}^{n} p_k\lambda + p_{n+1} \quad \text{(par HR)} \\ &= \lambda\sum_{k=1}^{n} p_k + p_{n+1} = \lambda P(X_1 \leq n) + P(X_1 = n+1) \\ &= \lambda - \lambda P(X_1 > n) + P(X_1 = n+1) \\ &= \lambda - P(X_1 > n)\left[\lambda - \frac{P(X_1 = n+1)}{P(X_1 > n)}\right] \\ &= \lambda - P(X_1 > n)\left[\lambda - P_{(X_1>n)}(X_1 = n+1)\right] \\ &= \lambda - P(X_1 > n)\left[\lambda - \lambda\right] \quad \text{(d'après 5.(b))} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Ccl. Par principe de récurrence forte, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

6. (a) La famille d'événement $(X_1 = k)_{k\geq 2}$ forme un SCE donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1 \Leftrightarrow p_1 + p_2 + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 \Leftrightarrow p + 1 - p + \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=3}^{+\infty} p_k = 0.$$

Or cette somme est à termes tous positifs donc comme cette somme est nulle, tous les termes sont nuls. Ainsi,

$$\forall k \geq 3, \quad p_k = 0.$$

(b) Soit la matrice

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix}$$

Or, d'après 4.(d),

$$\begin{aligned} u_n &= p_1u_{n-1} + p_2u_{n-2} + \ldots + p_{n-1}u_1 + p_nu_0 \\ &= pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} + \sum_{k=3}^{n} 0u_{n-k} \\ &= pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$M \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pu_{n-1} + (1-p)u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(c) i. On cherche les valeurs λ telles que $M - \lambda I_2$ non inversible par méthode du déterminant, on trouve :

$$Sp(M) = \{1, p-1\}.$$

On remarque que, comme $0 < p < 1$, alors $-1 < p-1 < 0$, donc M a deux valeurs propres distinctes.
On résout les équations $MX = X$ et $MX = (p-1)X$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on trouve respectivement

$$E_1(M) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{p-1}(M) = Vect\left(\begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, par concaténation de familles libres (à chaque fois un vecteur non nul) de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distincts, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p-1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et de cardinal égal à la dimension. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et M est diagonalisable. Si on pose

$$P = \begin{pmatrix} 1 & p-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p-1 \end{pmatrix},$$

on a donc $M = PDP^{-1}$.

ii. On peut utiliser la question précédente pour obtenir la formule (raisonnement classique avec $M^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$).
Comme on nous donne la formule, on peut également le démontrer directement par récurrence. Faisons cette méthode et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(n)$:

$$\text{"}M^{n-1} = \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & 1-p \end{pmatrix} + \frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\text{"}.$$

Ini. On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}+\frac{(p-1)^0}{2-p}\begin{pmatrix}1-p & p-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\
=\ &\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1+1-p & 1-p+p-1\\ 1-1 & 1-p+1\end{pmatrix}\\
=\ &\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}2-p & 0\\ 0 & 2-p\end{pmatrix}=I=M^0
\end{aligned}$$

donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Héré. Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors,

$$\begin{aligned}
M^n &= M^{n-1}M\\
&= \left(\frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}+\frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix}1-p & p-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{(par HR)}\\
&= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{(p-1)^{n-1}}{2-p}\begin{pmatrix}1-p & p-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p & 1-p\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{2-p}\begin{pmatrix}1 & 1-p\\ 1 & 1-p\end{pmatrix}+\frac{(p-1)^{n}}{2-p}\begin{pmatrix}1-p & p-1\\ -1 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Ccl. Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(d) i. D'après le résultats 6.(b), on peut prouver par une récurrence évidente que

$$\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n-1}\end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix}u_1\\ u_0\end{pmatrix}=M^{n-1}\begin{pmatrix}p\\ 1\end{pmatrix}.$$

On calcule la première ligne de ce produit matriciel, on obtient :

$$u_n=\frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}.$$

ii. Comme $-1<p-1<0<1$, on a :

$$u_n=\frac{1-(p-1)^{n+1}}{2-p}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2-p}.$$

Troisième partie : Étude de la durée de fonctionnement

7. La suite (X_i) est une suite de variables aléatoires identiquement distribuées donc, pour tout $i \geq 1$, X_i a une espérance et $E(X_i)=\mu$. Ainsi, par linéarité de l'espérance, T_k a une espérance, qui vaut :

$$E(T_k)=\sum_{i=1}^{k}E(X_i)=k\mu.$$

8. (a) Les variables $X_1,\dots,X_n$ étant indépendantes et identiquement distribuées, T_k admet donc une variance qui vaut :

$$V(T_k)=\sum_{i=1}^{k}V(X_i)=k\sigma^2.$$

(b) T_k admettant une variance, donc on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $k\varepsilon>0$:

$$P\left(|T_k-E(T_k)|\geq k\varepsilon\right)\leq\frac{V(T_k)}{k^2\varepsilon^2}\Leftrightarrow P\left(|T_k-k\mu|\geq k\varepsilon\right)\leq\frac{k\sigma^2}{k^2\varepsilon^2}=\frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}.$$

(c) On passe à l'événement contraire, on obtient :

$$P\left(|T_k - k\mu| < k\varepsilon\right) = 1 - P\left(|T_k - k\mu| \geq k\varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2}$$

Or,

$$\begin{aligned} [|T_k - k\mu| < k\varepsilon] &= [-k\varepsilon < T_k - k\mu < k\varepsilon] = [k(\mu-\varepsilon) < T_k < k(\mu+\varepsilon)] \\ &= \left[\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon\right] \end{aligned}$$

Ainsi, par théorème d'encadrement,

$$1 \geq P\left(\mu - \varepsilon < \frac{T_k}{k} < \mu + \varepsilon\right) = P\left(|T_k - k\mu| < k\varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k\varepsilon^2} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

9. (a) Effectuons une disjonction de cas sur le SCE $((X_i \leq m), (X_i > m))$:
   - Si $X_i \leq m$, alors $Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i + 0 = X_i$.
   - Si $X_i > m$, alors $Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = 0 + X_i = X_i$.

   Ainsi,
$$Y_i^{(m)} + Z_i^{(m)} = X_i.$$

(b) i. Posons f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_m(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Alors, $Z_1^{(m)} = f_m(X_1)$. Ainsi, par théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue, on a :

$$\begin{aligned} E(Z_1^{(m)}) = E(f_m(X_1)) &= \sum_{i=1}^{+\infty} f_m(i)P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} f_m(i)P(X_1 = i) + \sum_{i=m+1}^{+\infty} f_m(i)P(X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} 0P(X_1 = i) + \sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i) \end{aligned}$$

Or $\alpha > 1$ donc X_1 admet une espérance donc la série de terme général $iP(X_1 = i)$ converge absolument. Donc $Z_1^{(m)}$ admet bien une espérance et

$$E(Z_1^{(m)}) = \sum_{i=m+1}^{+\infty} iP(X_1 = i) \leq \sum_{i=m+1}^{+\infty} \frac{\alpha}{i^\alpha} \quad \text{(d'après 3.(d)ii.)}$$

ii. On applique la méthode de comparaison série-intégrale :
   - Pour tout $i \geq m+1$,

$$i - 1 \leq x \leq i \Rightarrow x^\alpha \leq i^\alpha \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \geq \frac{1}{i^\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha}{x^\alpha} \geq \frac{\alpha}{i^\alpha}.$$

   On intègre l'inégalité obtenue sur $[i-1, i]$ (bornes croissantes) :

$$\int_{i-1}^{i} \frac{\alpha}{x^\alpha} dx \geq \frac{\alpha}{i^\alpha}.$$

- Sommons l'inégalité obtenue sur $[\![m+1,+\infty[\![$:

$$\sum_{i=m+1}^{+\infty}\frac{\alpha}{i^\alpha}\leq\sum_{i=m+1}^{+\infty}\int_{i-1}^{i}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx=\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx\quad\text{(par relation de Chasles)}.$$

Ainsi,

$$E(Z_1^{(m)})\leq\sum_{i=m+1}^{+\infty}\frac{\alpha}{i^\alpha}\leq\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx.$$

iii. Pour tout $A\geq m$:

$$\begin{aligned}\int_m^A\frac{\alpha}{x^\alpha}dx &= \int_m^A\alpha x^{-\alpha}dx=\left[\frac{\alpha}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\right]_m^A\\ &= \frac{\alpha}{-\alpha+1}A^{-\alpha+1}+\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{-\alpha+1}\\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{\alpha-1}m^{-\alpha+1}\end{aligned}$$

car $\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0$ donc $A^{-\alpha+1}=\dfrac{1}{A^{\alpha-1}}\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

iv. On a :
- $Z_1^{(m)}\geq0$ car $X_i\geq0$ et $0\geq0$ donc $E(Z_1^{(m)})\geq0$.
- $E(Z_1^{(m)})\leq\displaystyle\int_m^{+\infty}\frac{\alpha}{x^\alpha}dx=\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{-\alpha+1}$ d'après 9.(b)ii. et 9.(b)iii.

Ainsi,

$$0\leq E(Z_1^{(m)})\leq\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{-\alpha+1}.$$

Or, $\lim\limits_{m\to+\infty}m^{-\alpha+1}=0$ donc, par théorème d'encadrement, $\lim\limits_{m\to+\infty}E(Z_1^{(m)})=0$.

v. $Y_1^{(m)}=X_1-Z_1^{(m)}$ donc par linéarité de l'espérance, $Y_1^{(m)}$ admet une espérance qui vaut

$$E(Y_1^{(m)})=E(X_1)-E(Z_1^{(m)})\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}\mu-0=\mu.$$

(c) i. D'après la définition de $Y_1^{(m)}$, on a $Y_1^{(m)}\leq X_1$ et $Y_1^{(m)}\leq m$ car si $X_1\leq m$ alors $Y_1^{(m)}=X_1\leq m$ et si $X_1>m$ alors $Y_1^{(m)}=0\leq m<X_1$.
Ainsi, $(Y_1^{(m)})^2=Y_1^{(m)}\times Y_1^{(m)}\leq mX_1$.

ii. $(Y_1^{(m)})^2\geq0$ et X_1 admet une espérance donc mX_1 admet une espérance, par théorème de comparaison, $Y_1^{(m)}$ admet alors un moment d'ordre 2, c'est-à-dire admet une variance. De plus, par théorème de Koenig-Huygens, on a

$$V(Y_1^{(m)})=E((Y_1^{(m)})^2)-E(Y_1^{(m)})^2\leq E((Y_1^{(m)})^2)\leq E(mX_1)=mE(X_1)=m\mu.$$

(d) On sait que $\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}\underset{m\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Donc par définition de la limite, $\forall\varepsilon>0$, il existe $m_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall m\geq m_0$, $\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}\leq\varepsilon$.

(e) On a

$$U_k^{(m)}+V_k^{(m)}=\sum_{i=1}^kY_i^{(m)}+\sum_{i=1}^kZ_i^{(m)}=\sum_{i=1}^k\left(Y_i^{(m)}+Z_i^{(m)}\right)=\sum_{i=1}^kX_i=T_k.$$

(f) i. $Z_i^{(m)}=f_m(X_i)$ est de même loi que $Z_1^{(m)}=f_m(X_1)$ (car X_i et X_1 ont même loi) donc $E(Z_i^{(m)})=E(Z_1^{(m)})$. Ainsi, par linéarité de l'espérance, $V_k^{(m)}$ admet une espérance qui vaut

$$E(V_k^{(m)})=\sum_{i=1}^kE(Z_i^{(m)})=kE(Z_1^{(m)})\leq k\times\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha}\qquad\text{(d'après 9.(b) i. et iii.)}.$$

ii. $V_k^{(m)} \geq 0$ et admet une espérance donc on peut appliquer l'inégalité de Markov:

$$P(V_k^{(m)} \geq k\varepsilon) \leq \frac{E(V_k^{(m)})}{k\varepsilon} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon} \quad \text{(d'après 9.(f)i.).}$$

(g) i. $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)}$ donc

$$E(U_k^{(m)}) = E(T_k) - E(V_k^{(m)}) = k\mu - E(V_k^{(m)}) \geq k\mu - k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha},$$

d'après 9.(f)i.

ii. • D'après la question précédente,

$$E(U_k^{(m)}) - k\mu \geq -k\frac{\alpha}{\alpha-1}m^{1-\alpha} \geq -k\varepsilon$$

d'après 9.(d).

• On sait que $U_k^{(m)} = T_k - V_k^{(m)} \leq T_k$ donc $E(U_k^{(m)}) \leq k\mu$ donc

$$E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq 0 \leq k\varepsilon.$$

Ainsi, $-k\varepsilon \leq E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq k\varepsilon \Leftrightarrow \left|E(U_k^{(m)}) - k\mu\right| \leq k\varepsilon.$

iii. Montrons que

$$[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon] \subset [|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon].$$

Si $[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon]$ alors $U_k^{(m)} - k\mu \leq -2k\varepsilon$ ou $U_k^{(m)} - k\mu \geq +2k\varepsilon$. Donc :

• Si $U_k^{(m)} - k\mu \leq -2k\varepsilon$ alors

$$U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) = U_k^{(m)} - k\mu + k\mu - E(U_k^{(m)}) \leq -2k\varepsilon + 0 \leq -k\varepsilon$$

donc $\left|E(U_k^{(m)}) - k\mu\right| \leq k\varepsilon.$

• Si $U_k^{(m)} - k\mu \geq 2k\varepsilon$ alors

$$U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)}) = U_k^{(m)} - k\mu + k\mu - E(U_k^{(m)}) \geq 2k\varepsilon - k\varepsilon$$

car d'après 9.(g) ii. $E(U_k^{(m)}) - k\mu \leq k\varepsilon$ donc $k\mu - E(U_k^{(m)}) \geq -k\varepsilon$.

Ainsi,

$$[|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon] \subset [|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon]$$

donc

$$P\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon\right) \leq P\left(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon\right).$$

iv. Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont mutuellement indépendantes donc, par lemme des coalitions, les variables $Y_1^{(m)}, Y_2^{(m)}, \ldots, Y_k^{(m)}$ sont ainsi mutuellement indépendantes. Elles sont toutes de même loi que $Y_1^{(m)}$.

Ainsi, $U_k^{(m)}$ admet une variance qui vaut

$$V(U_k^{(m)}) = \sum_{i=1}^{k} V(Y_i^{(m)}) = kV(Y_1^{(m)}) \leq km\mu \quad \text{(d'après 9.(c)ii.)}$$

v. On a :

$$\begin{aligned}
P\left(|U_k^{(m)} - k\mu| \geq 2k\varepsilon\right) &\leq P\left(|U_k^{(m)} - E(U_k^{(m)})| \geq k\varepsilon\right) \quad \text{(d'après 9.(g)iii.)} \\
&\leq \frac{V(U_k^{(m)})}{(k\varepsilon)^2} \quad \text{(par inégalité de Bienaymé-Tchebychev)} \\
&\leq \frac{km\mu}{k^2\varepsilon^2} \quad \text{(d'après 9.(g) iv.)} \\
&= \frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.
\end{aligned}$$

(h) i. Par formule du Crible, on a
$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
or $P(A\cup B)\leq 1$ (en tant que probabilité) donc $-P(A\cup B)\geq -1$, d'où :
$$P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1.$$

ii. On remarque que si l'événement $A\cap B$ se produit alors :
- $T_k=U_k^{(m)}+V_k^{(m)}<k(\mu+2\varepsilon)+k\varepsilon=k(\mu+3\varepsilon)$.
- $T_k=U_k^{(m)}+V_k^{(m)}>k(\mu-2\varepsilon)+0>k(\mu-3\varepsilon)$ (car $V_k^{(m)}$ est positif comme somme de variables positives).

Ainsi, on a justifié que :
$$A\cap B\subset (T_k\in]k(\mu-3\varepsilon),k(\mu+3\varepsilon)[)$$
D'où
$$\begin{aligned}&P\left(T_k\in]k(\mu-3\varepsilon),k(\mu+3\varepsilon)[\right)\\ \geq\ & P(A\cap B)\\ \geq\ & P\left(V_k^{(m)}<k\varepsilon\right)+P\left(U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\varepsilon),k(\mu+2\varepsilon)[\right)-1\end{aligned}$$

iii.
- D'après la question 9.(f)ii., on sait que
$$P\left(V_k^{(m)}<k\varepsilon\right)=1-P\left(V_k^{(m)}\geq k\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}.$$
- D'après la question 9.(g)v., on sait que
$$\begin{aligned}P\left(U_k^{(m)}\in]k(\mu-2\varepsilon),k(\mu+2\varepsilon)[\right)&=P\left(|U_k^{(m)}-k\mu|<2k\varepsilon\right)\\&=1-P\left(|U_k^{(m)}-k\mu|\geq 2k\varepsilon\right)\\&\geq 1-\frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après 9.(h)ii.,
$$P\left(T_k\in]k(\mu-3\varepsilon),k(\mu+3\varepsilon)[\right)\geq 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}+1-\frac{m\mu}{k\varepsilon^2}-1=1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m^{1-\alpha}}{\varepsilon}-\frac{m\mu}{k\varepsilon^2}.$$

iv. Pour tout $k\geq 1$, $\sqrt{k}\geq 1$ donc il existe un entier $m_k\in[\sqrt{k},2\sqrt{k}]$.
On a alors $\sqrt{k}\leq m_k\leq 2\sqrt{k}$, d'où $2^{1-\alpha}k^{\frac{1-\alpha}{2}}\leq m_k^{1-\alpha}\leq k^{\frac{1-\alpha}{2}}$ par décroissance de $x\mapsto x^{1-\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $1-\alpha<0$). Ainsi,
$$1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{k^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\varepsilon}-\frac{2\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2}\leq 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon}-\frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2}\leq 1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{2^{1-\alpha}k^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\varepsilon}-\frac{\mu}{\sqrt{k}\varepsilon^2}$$
Ainsi, par théorème d'encadrement,
$$\lim_{k\to+\infty}1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon}-\frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2}=1$$
car $\alpha>1$ donc $\frac{1-\alpha}{2}<0$.
De plus,
$$1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_k^{1-\alpha}}{\varepsilon}-\frac{m_k\mu}{k\varepsilon^2}\leq \Pr\left(\frac{T_k}{k}\in]\mu-3\varepsilon,\mu+3\varepsilon[\right)\leq 1$$
donc par théorème d'encadrement,
$$\lim_{k\to+\infty}P\left(\frac{T_k}{k}\in]\mu-3\varepsilon,\mu+3\varepsilon[\right)=1.$$