Correction - DM 10

A rendre le Mardi 7 Janvier

Exercice 1 (EDHEC 2004)

1. Pour tout $t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geq 1 > 0$ ce qui assure la continuité de $t \to \dfrac{1}{1+t+t^n}$ sur $[0;1]$.

   L'intégrale est donc bien définie car elle n'est pas généralisée.

2. Par primitivations directes,

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_0^1 \frac{1}{2+t}\, dt = \Big[\ln|2+t|\Big]_0^1 = \ln(3) - \ln(2) \\ u_1 &= \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\, dt = \left[\frac{1}{2}\ln|1+2t|\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3). \end{aligned}$$

3. (a) Soit $t \in [0,1]$. Par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, :

$$t^n \geq t^{n+1} \Rightarrow 1+t+t^n \geq 1+t+t^{n+1} > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}}.$$

   Par croissance de l'intégrale avec des bornes rangées dans l'ordre croissant,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^{n+1}} dt \Rightarrow u_n \leq u_{n+1}.$$

   La suite (u_n) est croissante.

   (b) Soit $t \geq 0$. Par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$t^n \geq 0 \Rightarrow 1+t+t^n \geq 1+t > 0 \Rightarrow \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}.$$

   On en déduit en intégrant cette inégalité avec des bornes dans l'ordre croissant que

$$u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \ln(2).$$

   (c) (u_n) est croissante et majorée donc, par le théorème des suites monotones, (u_n) converge.

4. (a) On se rappelle qu'on a rencontré que $\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt$. Donc on peut écrire par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\, dt = \int_0^1 \frac{1+t+t^n-1-t}{(1+t)\,(1+t+t^n)}\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)\,(1+t+t^n)}\, dt. \end{aligned}$$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$1+t+t^n \geq 1 \quad \text{et} \quad 1+t \geq 1$$

   donc par produit d'inégalités avec des termes tous positifs :

$$(1+t+t^n) \times (1+t) \geq 1$$

   puis en passant à l'inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et en multipliant par $t^n \geq 0$:

$$\frac{1}{(1+t+t^n) \times (1+t)} \leq 1 \quad \text{et} \quad \frac{t^n}{(1+t)\,(1+t+t^n)} \leq t^n$$

   qu'on intègre sur $[0,1]$ avec des bornes dans l'ordre croissant :

$$\ln(2) - u_n \leq \int_0^1 t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(c) La question 3.(b) donne $\ln(2) - u_n \geq 0$ donc on obtient l'encadrement

$$0 \leq \ln(2) - u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

qui donne par encadrement, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$:

$$\lim_{n \to +\infty} (\ln(2) - u_n) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$$

5. (a) $t \to \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$ car $1 + t + t^n \geq 1 > 0$ sur cet intervalle.
L'intégrale est donc généralisée en $+\infty$ et la fonction intégrée est positive.
Comme $n \geq 2$,

$$\frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1}{t^n \left(1 + \frac{1}{t^{n-1}} + \frac{1}{t^n}\right)} \underset{t \to +\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$$

car $n \geq 2$ et $n - 1 \geq 1$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t^n} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{n-1}} = 0$.

Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} \, dt$ est une intégrale de Riemann en $+\infty$, convergente car $n \geq 2 > 1$, et est également l'intégrale d'une fonction positive.
Par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, l'intégrale définissant v_n est convergente et v_n est bien définie.

(b) Pour tout $t \geq 1$, on a par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$1 + t + t^n \geq t^n > 0 \text{ donc } 0 \leq \frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{t^n}$$

et en intégrant avec des bornes dans l'ordre croissant (toutes les intégrales sont bien convergentes) :

$$0 \leq v_n \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} dt.$$

et on calcule cette dernière intégrale en revenant à l'intégrale partielle : pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{1}{t^n} \, dt = \left[\frac{t^{-n+1}}{-n+1} \right]_1^x = \frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{n-1}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^n} = \frac{1}{n-1} \quad \text{et enfin} \quad 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}.$$

(c) Par théorème de comparaison, comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, (v_n) converge vers 0.
On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} \, dt = \lim_{n \to +\infty} (u_n + v_n) = \ln(2) + 0 = \ln(2).$$

Exercice 2 (EDHEC 2003)

1. (a) On passe par l'intégrale partielle : pour tout $y \geq n$, on a :

$$\int_n^y f(x) dx = -\int_n^y -\frac{1}{x^2} e^{1/x} dx = -\left[e^{1/x}\right]_n^y = -e^{1/y} + e^{1/n} \xrightarrow[y \to +\infty]{} e^{1/n} - 1$$

car $\frac{1}{y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$ donc $e^{1/y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 1$ (par continuité de exp). On en déduit que l'intégrale I_n converge, et

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x) \, dx = e^{1/n} - 1.$$

(b) Comme $u = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$ donc $I_n = e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$.

2. On procède par théorème de comparaison et on cherche un équivalent simple de u_n :

$$u_n = f(n) = \frac{e^{1/n}}{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

car $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{e} {}^0 = 1$ (par continuité de exp).

Or les deux séries sont à termes positifs et la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$), donc le théorème de comparaison assure que la série de terme général $u_n = f(n)$ converge.

3. (a) Ce type d'inégalité, très classique, repose sur la monotonie de f :
f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, avec $x^2 \neq 0$ sur cet intervalle. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x} \times x^2 - 2xe^{1/x}}{x^4} = \frac{e^{1/x}}{x^4}(-1-2x) < 0 \quad \text{sur }]0;+\infty[$$

donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.
On en déduit que pour tout $k > 0$ et pour tout $x \in [k;k+1]$,

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

et en intégrant cette inégalité sur $[k;k+1]$ (les bornes sont dans l'ordre croissant) on obtient :

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\ dx \leq \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq \int_k^{k+1} f(k)\ dx$$

qui donne enfin :

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq f(k)$$

car

$$\int_k^{k+1} dx = (k+1) - k = 1.$$

(b) On somme ces inégalités pour k allant de n à p où p est un entier quelconque supérieur à $n+1$:

$$\sum_{k=n}^{p} u_{k+1} \leq \sum_{k=n}^{p} \int_k^{k+1} f(x)\ dx \leq \sum_{k=n}^{p} u_k.$$

Cela donne après un changement d'indice dans la première somme et par relation de Chasles pour les intégrales :

$$\sum_{k=n+1}^{p} u_k \leq \int_n^{p+1} f(x)\ dx \leq u_n + \sum_{k=n+1}^{p} u_k.$$

On fait alors tendre p vers $+\infty$, et comme les deux séries et l'intégrale convergent (questions 1 et 2) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq \int_n^{+\infty} f(x)\ dx \leq \frac{e^{1/n}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Enfin on reconnaît I_n :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \frac{e^{1/n}}{n^2} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

(c) On pose $v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et on cherche à l'encadrer. L'inégalité de gauche donne

$$v_n \leq I_n$$

et celle de droite donne

$$v_n \geq I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2}$$

donc on obtient l'encadrement :

$$I_n - \frac{e^{1/n}}{n^2} \leq v_n \leq I_n.$$

Pour obtenir un équivalent on va chercher à encadrer par deux quantités qui tendent vers 1, on divise donc cette inégalité par I_n, strictement positif :

$$1 - \frac{\frac{e^{1/n}}{n^2}}{I_n} \leq \frac{v_n}{I_n} \leq 1.$$

On cherche la limite du terme de gauche :

$$I_n \sim \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \frac{\frac{e^{1/n}}{n^2}}{I_n} \sim \frac{\frac{e^{1/n}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{e^{1/n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par quotient de limites, car par composée $e^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ (par continuité de exp).
On en déduit que

$$1 - \frac{\frac{e^{1/n}}{n^2}}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puis par théorème d'encadrement

$$\frac{v_n}{I_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{donc} \quad v_n \underset{+\infty}{\sim} I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

et enfin :

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

4. **Informatique:**

(a) On fait des produits et des quotients termes à termes sur des vecteurs. Le coefficient d'indice n de la matrice `np.ones(1000)` étant 1, et celui de la matrice `k` étant $n+1$, le coefficient d'indice n de la matrice `U` est donc $U(n) = \frac{e^{1/(n+1)}}{(n+1)^2}$.

(b) `S` fait la somme cumulée des termes de `U` donc $S(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{e^{1/k}}{k^2}$.

(c) $R(n) = \sum_{k=1}^{1000} \frac{e^{1/k}}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{1/k}}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{1000} \frac{e^{1/k}}{k^2}$.

(d) On admet que $R(n) \simeq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$.

On trace donc (une valeur approchée) des 100 premiers termes de la suite (v_n) de la question 3.(c). On remarque que le comportement de cette suite coïncide au voisinage de $+\infty$ avec celui de la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ ce qui illustre l'équivalent obtenu à la question 3.(c).

Exercice 3 (EDHEC 2012)

1. Par la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 \times \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

On pose alors la fonction $g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ et on dérive ses 2 expressions (dérivable en tant que polynôme) :

- $g(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ donc $g'(x) = \sum_{k=0}^{n} kx^{k-1}$;
- $g(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ donc $g'(x) = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$$

2. Loi de T_n

(a) Si $1 \leq k \leq n-1$, $(T_n = k)$ signifie qu'on a lancé $k \leq n-1$ fois la pièce avant de s'arrêter. On n'a donc pas pu obtenir n faces, et on s'est arrêté sur un pile.
Enfin les lancers précédents ne peuvent pas avoir donné pile, sinon on se serait arrêté après.
D'où, si $k \geq 2$,

$$P(T_n = k) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k) = q^{k-1}p$$

par indépendance des lancers,
et si $k = 1$,

$$P(T_n = 1) = P(P_1) = p = q^0 p$$

donc la formule ci-dessus est encore valable.

(b) $(T_n = n)$ peut avoir été obtenu de deux manières : avec n fois face ou avec $n-1$ fois face et une fois pile. On a donc :

$$P(T_n = n) = P\big((F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)\big) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_n) + P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

par incompatibilité, puis :

$$P(T_n = n) = q^n + q^{n-1}p = q^{n-1}(q+p) = q^{n-1}$$

par indépendance des lancers.

(c) Dans la somme, il faut isoler la valeur $k = n$ qui n'a pas la même formule que les autres :

$$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = p\sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} + q^{n-1} = p\frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q^{n-1} = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1.$$

(d) T_n étant finie, elle a une espérance et :

$$\begin{aligned} E(T_n) &= p\sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} + nq^{n-1} = p\frac{(n-1)q^n - nq^{n-1}+1}{(1-q)^2} + nq^{n-1} \\ &= \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1 + nq^{n-1}(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

3. Loi de X_n.

   (a) Lors des lancer, on a ou bien k Face puis un Pile et on s'arrête, ou bien n face et aucun pile et on s'arrête. Donc $X_n(\Omega) = \{0,1\}$ avec $(X_n = 0) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ donc par indépendance des lancers, $P(X_n = 0) = q^n$.
   Donc $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - q^n)$.

   (b) X_n admet donc une espérance et $E(X_n) = 1 - q^n$.

4. Loi de Y_n.

   (a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $(Y_n = k)$ signifie que l'on a eu k Face (donc pas n) et donc ensuite un Pile, ce qui donne en écriture mathématique :
   $(Y_n = k) = F_1 \cap \cdots \cap F_k \cap P_{k+1}$ donc par indépendance des lancers, $P(Y_n = k) = q^k p$.

   (b) $(Y_n = n)$ signifie que l'on a eu n Face donc aucun pile (il ne peut y avoir plus de n lancers) d'où : $(Y_n = n) = F_1 \cap \cdots \cap F_n$ et par indépendance, $P(Y_n = n) = q^n$.

   (c) Le nombre total de lancer est le nombre total de Pile et de Face obtenus donc $T_n = X_n + Y_n$ donc la linéarité de l'espérance donne :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = (1-q^n)\left(\frac{1}{1-q} - 1\right) \\ &= (1-q^n)\frac{1-1+q}{1-q} = (1-q^n)\frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

5. (a) Voici la fonction complétée :

```python
def simul(n,p):
    t = 0
    x = 0
    y = 0
    while (x==0) and (t<n):
        t = t+1
        if rd.random()>p:
            y = y+1
        else:
            x = x+1
        return [t, x, y]
```

   (b) Les termes p_k vérifient : $p_0 = p$ et $\forall k \in [\![1; n-2]\!]$, $p_k = (1-p)p_{k-1}$ donc suivent une relation de suite géométrique de raison $1-p$. On a donc $p_k = p(1-p)^k$ pour tout $k \in [\![0; n-2]\!]$.
   Enfin, $p_{n-1} = \dfrac{(1-p)}{p} p_{n-2} = \dfrac{(1-p)}{p} pq^{n-2} = (1-p)^{n-1}$.
   Cette fonction renvoie donc la loi (théorique) de la variable T_n.

   (c) Ce programme mémorise 1000 simulations de la variable T_n dans la liste `T` puis il calcule les effectifs par modalité avec la fonction `count` et les mémorise dans une liste `E`. Il renvoie donc les effectifs correspondants à chaque modalité (de 1 à n).
   La fréquence de l'évènement $(T_n = 5)$ au cours des 1000 simulations est donc

$$f = \frac{\text{effectif}}{\text{effectif total}} = 0,073.$$

   (d) Le diagramme des fréquences de T_n sur 1000 simulations est très proche de la loi théorique de T_n . On retrouve la propriété : la fréquence d'un évènement A sur un grand nombre de simulations converge vers la probabilité mathématique de A.