Correction - DM 8

A rendre le Mercredi 11 Décembre

Exercice 1

1. A a deux colonnes (1 et 2) égales donc n'est pas inversible. On peut aussi dire que les lignes 1 et 2 sont égales.

2. On cherche les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible, cherchons une réduite triangulaire :

$$\begin{aligned}
A - \lambda I &= \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda-2 \\ 0 & \lambda & 1-(1-\lambda)(3-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\
\Leftrightarrow & \ T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda-2 \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2
\end{aligned}$$

avec

$P(\lambda) = 1-(1-\lambda)(3-\lambda)+\lambda-2 = \lambda-1-(1-\lambda)(3-\lambda) = (\lambda-1)\left[1+(3-\lambda)\right] = (\lambda-1)(4-\lambda).$

Les valeurs de λ pour lesquelles $A - \lambda I$ n'est pas inversible sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de cette réduite triangulaire, soit les solutions de :

$$-\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad \text{et} \quad P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda = 4.$$

Donc $Sp(A) = \{0; 1; 4\}$.

3. On cherche $E_0(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (A - 0I)X = 0\}$:

$$\begin{aligned}
AX = 0 &\Leftrightarrow T_0 X = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+3z = 0 \\ -2z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_0(A) = \left\{ y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est générateur de $E_0(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_0(A)$.

On cherche $E_1(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A-I)X = 0\}$:

$$\begin{aligned}(A-I)X=0 &\Leftrightarrow T_1X=0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+2z=0\\ -y-z=0\\ 0=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-z\\ y=-z\\ 0=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}-z\\-z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_1(A)=\left\{z\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix} \mid z\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Donc $X_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est générateur de $E_1(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_1(A)$.

On cherche $E_4(A) = \{X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}); (A-4I)X = 0\}$:

$$\begin{aligned}(A-4I)X=0 &\Leftrightarrow T_4X=0\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y-z=0\\ -4y+2z=0\\ 0=0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}z\\ y=\frac{1}{2}z\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=z\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_4(A)=\left\{z\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \mid z\in\mathbb{R}\right\}=Vect\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}\right)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right).$$

Donc $X_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ est générateur de $E_4(A)$ et libre car non nul donc c'est une base de $E_4(A)$.

4. Par concaténation de familles libres associées aux sous-espaces propres $E_0(A)$, $E_1(A)$ et $E_4(A)$ (valeurs propres deux à deux distinctes), la famille $\mathscr{B}$ est libre. Comme $card(\mathscr{B}) = 3 = dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, c'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

5. On a trouvé une famille $\mathscr{B}$ de vecteurs propres qui forment une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable et plus précisément, si on pose $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}$ alors $A=PDP^{-1}$.

Pour déterminer P^{-1} , on résout cette question avec la méthode du pivot :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$$

Cette réduite triangulaire n'a aucun 0 sur la diagonale donc P est inversible.

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 6 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow 3L_2 - L_3 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 1/6L_1 \\ L_2 \leftarrow 1/6L_2 \\ L_3 \leftarrow 1/6L_3 \end{array}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Voici les instructions `Python` :

```python
A = np.ones((3,3))
A[2,2] = 3
Vp, SP = al.eig(A)
print("Vp = ", Vp)
print("SP = ", SP)
```

(b) La matrice D confirme bien que les valeurs propres de A sont 0, 1 et 4.
De plus les trois vecteurs colonnes obtenus sont bien des vecteurs propres associés aux valeurs propres correspondantes de D car ils sont respectivement colinéaires à :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On a bien une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A.

7. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$:

Ini. Pour $n = 0$, on a : $A^0 = I$ et $PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
Donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

8. On en déduit alors que :

$$P^{-1}(A^n)P = P^{-1}(PD^nP^{-1})P = ID^nI = D^n \text{ donc } D^n = P^{-1}A^nP.$$

9. On montre que E est un sous-espaces vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:
   - La matrice nulle vérifie $A0 = 0A = 0$, donc $0 \in E$ et $E \neq \emptyset$.
   - Soient $M_1, M_2 \in E$ donc tels que $AM_1 = M_1A$ et $AM_2 = M_2A$. Alors :
   $$A(M_1 + M_2) = AM_1 + AM_2 = M_1A + M_2A = (M_1 + M_2)A$$
   et $(M_1 + M_2) \in E$, qui est donc stable par somme.
   - Soit $M \in E$ donc tel que $AM = MA$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :
   $$A(\lambda M) = \lambda AM = \lambda MA = (\lambda M)A$$
   et $(\lambda M) \in E$, qui est donc stable par produit par un scalaire.

   Finalement, ces trois propriétés permettent d'affirmer que E est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

10. On écrit F sous forme d'un sous-espace vectoriel engendré :
$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= Vect\left(\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = Vect(B, C, D) \end{aligned}$$
    Donc F est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $B, C, D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$: c'est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

    La famille (B, C, D) est génératrice de F, montrons qu'elle est libre.

    On résout l'équation $aB + bC + cD = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0$ (faire le calcul).

    La famille (B, C, D) est donc une base de F.

11. Soit $M \in F$. Il existe donc a, b et c tels que :
$$M = \begin{pmatrix} 3a+2b+c & -3a+2b+c & -2b+2c \\ -3a+2b+c & 3a+2b+c & -2b+2c \\ -2b+2c & -2b+2c & 2b+4c \end{pmatrix}$$
    Pour vérifier si M est dans E, on calcule AM et MA :
$$\begin{aligned} AM &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a+2b+c & -3a+2b+c & -2b+2c \\ -3a+2b+c & 3a+2b+c & -2b+2c \\ -2b+2c & -2b+2c & 2b+4c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b+4c & 2b+4c & -2b+8c \\ 2b+4c & 2b+4c & -2b+8c \\ -2b+8c & -2b+8c & 6b+16c \end{pmatrix} \end{aligned}$$
    et
$$\begin{aligned} MA &= \begin{pmatrix} 3a+2b+c & -3a+2b+c & -2b+2c \\ -3a+2b+c & 3a+2b+c & -2b+2c \\ -2b+2c & -2b+2c & 2b+4c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2b+4c & 2b+4c & -2b+8c \\ 2b+4c & 2b+4c & -2b+8c \\ -2b+8c & -2b+8c & 2b+16c \end{pmatrix} \end{aligned}$$
    Donc M vérifie bien $AM = MA$, donc $M \in E$. On en déduit finalement que tous les éléments de F sont aussi dans E, donc $F \subset E$.

12. (a) On remarque que $N = P^{-1}MP \Leftrightarrow M = PNP^{-1}$, puis avec P et P^{-1} inversibles qui permettent de raisonner par équivalence :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow AM = MA \Leftrightarrow PDP^{-1}PNP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P(DN)P^{-1} = P(ND)P^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}[PDNP^{-1}]P = P^{-1}[PNDP^{-1}]P \\ &\Leftrightarrow DN = ND. \end{aligned}$$

(b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on résout :

$$\begin{aligned} DN = ND &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 & b = 0 & 4c = 0 \\ d = 0 & 0 = 0 & 3f = 0 \\ 4g = 0 & 3h = 0 & 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = a & b = 0 & c = 0 \\ d = 0 & e = e & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 & i = i \end{cases} \Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) On en déduit qu'une matrice M de E vérifie :

$$\begin{aligned} M \in E &\Leftrightarrow DN = ND \Leftrightarrow N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow M = PNP^{-1} = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

On calcule ce produit et on obtient :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3a + 2e + i & -3a + 2e + i & -2e + 2i \\ -3a + 2e + i & 3a + 2e + i & -2e + 2i \\ -2e + 2i & -2e + 2i & 2e + 4i \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= aB + eC + iD. \end{aligned}$$

On obtient finalement : $E = Vect(B, C, D) = F$.

Exercice 2 (EML 2004)

1. On vérifie les critères :

- Comme $A \times 0 = 0$ alors $0 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
- Si M et N sont deux matrices de $E_1(A)$ et λ un réel alors : $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda M + N$ car M et N sont dans $E_1(A)$
  Donc $\lambda M + N \in E_1(A)$.

Donc $E_1(A)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

On montre de la même manière que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

2. (a) Pour montrer l'inclusion on montre que **si** $M \in E_1(A)$ alors $M \in E_2(A)$:
Si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ donc $A^2M = A(AM) = AM$ et donc $M \in E_2(A)$.

(b) Si A est inversible, pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque :
Si $M \in E_2(A)$ alors $A^2M = AM$ et $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ d'où $AM = M$. Alors $M \in E_1(A)$.
Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ et finalement $E_1(A) = E_2(A)$.

(c) On a déjà $0 \in E_1(A)$ car $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc $\{0\} \subset E_1(A)$.
Supposons que $A - I$ est inversible et montrons l'inclusion réciproque. Si $M \in E_1(A)$ alors $AM = M$ d'où $AM - M = 0$ et $(A - I)M = 0$ et comme $A - I$ est inversible alors $M = 0$.
Donc $E_1(A) \subset \{0\}$.
Finalement, $E_1(A) = \{0\}$ si $A - I$ est inversible.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme B est diagonale à coefficients diagonaux non nuls, B est inversible donc $E_1(B) = E_2(B)$.

Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est également inversible alors $E_1(B) = \{0\} = E_2(B)$.

4. (a) On recherche les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{R}$ de C avec la méthode du pivot :

$$C - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 3-\lambda & -2 & -1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & 2(1-\lambda) & \lambda - 2 \\ 0 & 2(1-\lambda) & (\lambda-2)(1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -\lambda \\ 0 & 2(1-\lambda) & \lambda - 2 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-2) \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2.$$

Les valeurs de λ pour lesquelles $C - \lambda I_3$ n'est pas inversible sont les valeurs qui annulent l'un au moins des coefficients diagonaux de cette réduite triangulaire, c'est-à-dire $0, 1, 2$.
Donc $Sp(C) = \{0, 1, 2\}$.
On cherche les sous-espaces propres associés :

- Pour $F_0(C)$:

$$(C - 0I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y & = & 0 \\ 2y - 2z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y = z.$$

Donc $F_0(C) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $F_1(C)$:

$$(C - I_3)X = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - 2y - z & = & 0 \\ -z & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = y \text{ et } z = 0.$$

Donc $F_1(C) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $F_2(C)$:

$$(C-2I_3)X=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x-2y-2z & = & 0 \\ -2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow y=0 \text{ et } x=z.$$

Donc $F_2(C)=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

(b) On montre que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

- $Card\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)=3=dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.
- On montre que $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre :

$$\begin{aligned} a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=0 \quad & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ a+b & = & 0 \\ a+c & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ -c & = & 0 \ (L_2 \leftarrow L_2-L_1) \\ -b & = & 0 \ (L_3 \leftarrow L_3-L_1) \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \quad a=b=c=0 \end{aligned}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et C est diagonalisable.

Donc avec $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, on a $C=P\,D\,P^{-1}$ (les conditions d'ordre des terme de D et de première ligne de P étant bien respectées).

(c) Soit $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N=P^{-1}M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On a alors :

$$\begin{aligned} M\in E_1(C) \quad & \Leftrightarrow \quad CM=M \Leftrightarrow CPN=PN \Leftrightarrow P^{-1}CP=N \\ & \Leftrightarrow \quad DN=N \Leftrightarrow N\in E_1(D). \end{aligned}$$

(d) Soit $N\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont : $\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\u&v&w\end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} N\in E_1(D) \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\u&v&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\u&v&w\end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 0=x \\ 0=y \\ 0=z \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} a=a \\ b=b \\ c=c \end{array}\right. \text{ et } \left\{\begin{array}{l} 2u=u \\ 2v=v \\ 2w=w \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \quad N=\begin{pmatrix}0&0&0\\a&b&c\\0&0&0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(e) Avec les deux questions précédentes, on en déduit que $M \in E_1(C)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que

$$\begin{aligned} M &= P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc une famille génératrice de $E_1(C)$ et libre (à démontrer mais c'est très simple) est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

qui est donc une base de $E_1(C)$ qui a finalement une dimension de 3.

(f) Comme D donc C n'est pas inversible on ne peut pas utiliser les résultats de la question 2. Par contre, on peut refaire le même raisonnement que précédemment :

$$M \in E_2(C) \Leftrightarrow C^2M = CM \Leftrightarrow PD^2P^{-1}N = PDP^{-1}M \Leftrightarrow D^2N = DN \Leftrightarrow N \in E_2(D)$$

Avec les mêmes coefficients que précédemment (comme D est diagonale) :

$$\begin{aligned} N \in E_2(D) &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{et} \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{et} \begin{cases} 4u = 2u \\ 4v = 2v \\ 4w = 2w \end{cases} \\ &\Leftrightarrow N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les matrices de $E_2(C)$ sont celles qui s'écrivent

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{pmatrix}$$

et une famille génératrice et libre (à démontrer) de $E_2(C)$ est :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

donc une base de $E_2(C)$. La dimension de $E_2(C)$ est donc 6.
Comme $E_1(C)$ et $E_2(C)$, n'ont pas la même dimension, ils ne peuvent pas être égaux.

Exercice 3 (ECRICOME 2003)

1. ch et sh sont définies sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch(x) \quad \text{ et } \quad sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh(x)$$

donc ch est paire et sh est impaire.

2. sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$sh'(x) = \frac{e^{x} - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = ch(x) > 0$$

car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. On obtient donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$sh'(x)$		$+$		$+$	
$sh(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$sh(x)$		$-$	0	$+$	

En effet

$$sh(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc par somme

$$\lim_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty$$

et par imparité de sh,

$$\lim_{x \to -\infty} sh(x) = -\infty.$$

3. On factorise les sommes par leur termes prépondérants :

$$sh(x) = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{2}$$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - e^{-2x}) = 1$ donc

$$sh(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}$$

Enfin on en déduit (par croissances comparées pour la seconde limite) que

$$\lim_{x \to +\infty} sh(x) = +\infty \quad \text{ et } \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{sh(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$$

donc la courbe de sh admet une branche parabolique verticale au voisinage de $+\infty$.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $sh'(x) = ch(x) > 0$ donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et continue par continuité de l'exponentielle.
Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]\lim\limits_{x \to -\infty} sh(x); \lim\limits_{x \to +\infty} sh(x)\right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$.

5. ch est comme somme et composée de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

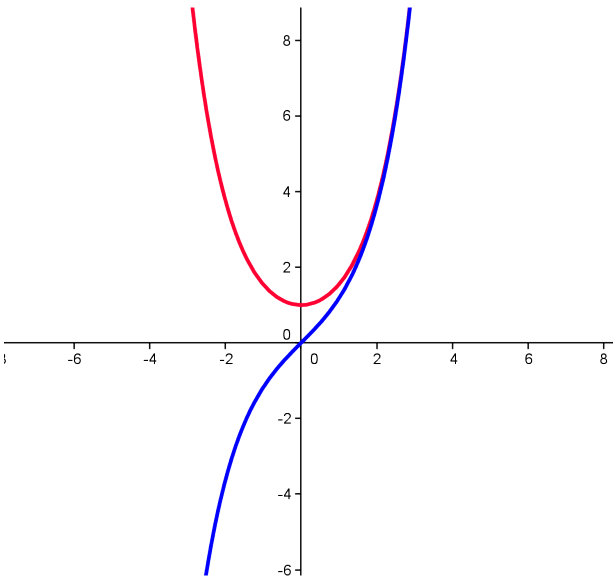
$$ch'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh(x).$$

dont on a déterminé le signe précédemment. Cela donne :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$ch'(x)$		$-$	0	$+$	
$ch(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

En effet
$$ch(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1,$$
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$$
et par parité de ch
$$\lim_{x\to-\infty} ch(x) = +\infty.$$

6. $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$ch(x) - sh(x) = \frac{e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x}}{2} = e^{-x} > 0$$
donc on en déduit que
$$ch(x) > sh(x)$$

7. 

8. f est défini sur $\mathbb{R}$ qui est bien centré en 0. De plus pour tout $x \neq 0$,
$$f(-x) = \frac{-x}{sh(-x)} = \frac{-x}{-sh(x)} = \frac{x}{sh(x)} = f(x)$$
et
$$f(-0) = f(0)$$
La fonction f est donc paire.

9. On écrit les développements limités à l'ordre 2 en 0 de e^x et e^{-x} :
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

puis en remplaçant x par $-x$:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

On soustrait :

$$e^x - e^{-x} = 2x + o\left(x^2\right)$$

et enfin :

$$sh(x) = x + o\left(x^2\right).$$

10. On en déduit que pour tout $x \neq 0$ et au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{x}{x + o(x^2)} = \frac{x}{x\left(1 + o(x)\right)} = \frac{1}{1 + o(x)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

D'autre part, toujours pour $x \neq 0$ et au voisinage de 0,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{1}{1+o(x)} - 1}{x} = \frac{-o(x)}{x(1 + o(x))} = \frac{-o(1)}{1 + o(x)} \underset{x \to 0}{\to} 0$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

11. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ comme quotient de fonctions dérivables, avec $sh(x) \neq 0$ sur ces intervalles. De plus $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1 \times sh(x) - x \times ch(x)}{(sh(x))^2} = \frac{sh(x) - xch(x)}{(sh(x))^2}.$$

12. h est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$h'(x) = sh'(x) - ch(x) - xch'(x) = ch(x) - ch(x) - xsh(x) = -xsh(x)$$

donc

$$h'(x) < 0 \quad \text{sur }]0; +\infty[\quad \text{et} \quad h'(0) = 0.$$

Enfin $h(0) = 0$ et h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $h(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	‖
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖
$h(x)$	0	$-$	‖

13. Comme $(sh(x))^2 > 0$ et $h(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$, on a $f'(x) < 0$ sur $]0; +\infty[$ et $f'(0) = 0$. Cela donne :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	‖
$f(x)$	1	$\searrow$	0 ‖

car $f(0) = 1$ et

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\frac{e^x}{2}} \sim \frac{2x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

par croissances comparées.

On construit donc une courbe décroissante sur $\mathbb{R}_+$, partant de 1 en 0 avec une tangente horizontale et arrivant sur une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$.

La courbe sur $\mathbb{R}_-$ est obtenue par symétrie par rapport à l'axe (Oy) car f est paire.

14. f est strictement décroissante et continue sur $[0,8;1]$ donc par le théorème de bijection monotone,

$$f([0,8;1]) = [f(1); f(0,8)] \subset [0,8;1]$$

car $f(1) > 0,8$ et $f(0,8) < 1$.

Montrons alors par récurrence sur $n \geq 0$ que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,8;1]$:

Ini. Pour $n = 0$, on a

$$u_0 = 1 \in [0,8;1]$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \in [0,8;1]$. Alors :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,8;1]) \subset [0,8;1] \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \in [0,8;1]$$

et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,8;1]$.

15. Tout d'abord on a $f(0) = 1 \neq 0$ donc 0 n'est pas solution.

Pour $x \neq 0$ on résout :

$$f(x) = x \iff \frac{x}{sh(x)} = x \iff \frac{1}{sh(x)} = 1 \iff sh(x) = 1.$$

Or par 1.4 la fonction sh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $1 \in \mathbb{R}$ donc l'équation $sh(x) = 1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, et l'équation $f(x) = x$ admet α pour unique solution.

16. La fonction sh est strictement croissante; les valeurs données par l'énoncé permettent d'écrire :

$$sh(0,8) < 1 = sh(\alpha) < sh(1) \quad \text{donc} \quad 0,8 < \alpha < 1.$$

De plus pour tout $x \in [0,8;1]$,

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(sh(x))^2}.$$

Par décroissance de h, pour $x \in [0,8;1]$ on a

$$h(1) \leq h(x) \leq h(0,8) \quad \text{donc} \quad -h(0,8) \leq -h(x) \leq -h(1)$$

et par croissance de sh on a

$$0 < sh(0,8) \leq sh(x) \leq sh(1)$$

qui donne avec la croissance de la fonction carré et la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$:

$$0 < (sh(0,8))^2 \leq (sh(x))^2 \leq (sh(1))^2 \quad \text{puis} \quad \frac{1}{sh^2(1)} \leq \frac{1}{sh^2(x)} \leq \frac{1}{sh^2(0,8)}.$$

On multiplie alors les 2 inégalités qui ne concernent que des nombres positifs :

$$\frac{-h(0,8)}{sh^2(1)} \leq -f'(x) \leq \frac{-h(1)}{sh^2(0,8)},$$

et enfin en multipliant par $-1 > 0$:

$$\frac{h(1)}{sh^2(0,8)} \leq f'(x) \leq \frac{h(0,8)}{sh^2(1)}.$$

17. f est dérivable sur $[0,8;1]$ et pour tout $x \in [0,8;1]$,

$$-0,5 < -0,47 \leq f'(x) \leq -0,13 < 0,5 \quad \text{donc} \quad |f'(x)| < 0,5.$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors : pour tous x et y de $[0,8;1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leq 0,5 \times |x - y|.$$

On applique cette inégalité à $x = u_n \in [0,8;1]$ et $y = \alpha \in [0,8;1]$ et on obtient :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq 0,5 \times |u_n - \alpha|$$

et encore :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,5 \times |u_n - \alpha|.$$

Montrons ensuite par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq 0.2\,(0.5)^n$.

Ini. Pour $n = 0$,

$$0,8 \leq \alpha \leq 1 \quad \text{donc} \quad 0 \leq 1 - \alpha \leq 0,2 \quad \text{donc} \quad |1 - \alpha| \leq 0,2$$

et $0,2 \times (0,5)^0 = 0,2$ donc

$$|u_0 - \alpha| \leq 0,2 \times (0,5)^0$$

et la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Héré. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $|u_n - \alpha| \leq 0,2 \times 0,5^n$. Alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq 0,5 \times |u_n - \alpha| \leq 0,5 \times 0,2 \times 0,5^n = 0,2 \times 0,5^{n+1}.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Ccl. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq 0.2 \times (0,5)^n$.

18. $|0,5| < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,2 \times (0,5)^n = 0$.

Par encadrement (une valeur absolue est toujours positive), on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - \alpha| = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n - \alpha = 0 \quad \text{et enfin} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha.$$

19. D'après l'inégalité de la question précédente, il suffit que l'on ait : $0,2 \times (0,5)^n \leq 0,001$ pour que l'on ait : $|u_n - \alpha| \leq 0,001$ par majoration.

On résout donc :

$$0,2 \times (0,5)^n \leq 0,001 \Leftrightarrow (0,5)^n = e^{n\ln(0,5)} \leq \frac{0,001}{0,2} = \frac{1}{200}$$

$$\Leftrightarrow \text{ (en compasant par ln croissante) } n\ln(\frac{1}{2}) \leq \ln(\frac{1}{200}) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(\frac{1}{200})}{\ln(\frac{1}{2})} \text{ (car } \ln(1/2) < 0)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(200)}{-\ln(2)} = \frac{\ln(200)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^3 \times 5^2)}{\ln(2)} = \frac{3\ln(2) + 2\ln(5)}{\ln(2)} = 3 + 2\frac{\ln(5)}{\ln(2)}.$$

Ainsi, comme $2\frac{log(5)}{log(2)} \in]4,5[$, les entiers n supérieurs à $3 + 2\frac{\ln(5)}{\ln(2)}$, sont les entiers supérieurs à $N = 8$.

20. (a) Voici le programme demandé :

```python
def f(x):
    if x == 0 :
        y = 1
    else:
        y = x/((np.exp(x)-np.exp(-x))/2)
    return(y)
```

(b) Voici le programme demandé :

```python
N = 8
U = 1
for k in range(1, N+1):
    U = f(U)
print(U)
```

(c) On sait d'après la question 6. que $|u_N - \alpha| \leq 0,001$ i.e. $u_N - 0,001 \leq \alpha \leq u_N + 0,001 \Leftrightarrow 0,8803753 \leq \alpha \leq 0,8823753$