Correction - DS 11 (A)

Devoir surveillé du Samedi 22 Mars

Exercice 1 (ECRICOME 2023 - Sujet zéro)

1. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, centré en 0, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -(x^3 - 3x) = -f(x).$$

Donc f est impaire sur $\mathbb{R}$.

2. D'une part, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^3$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynomiale) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

On en déduit le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

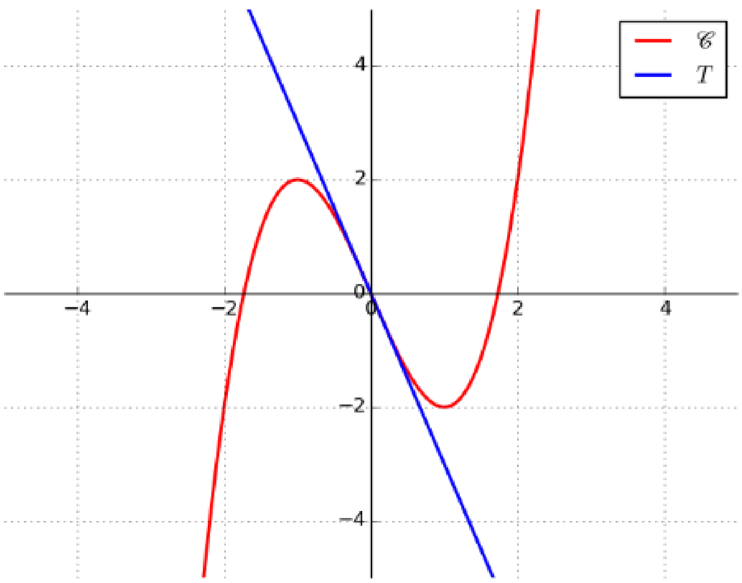
3. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = 6x$. Donc f'' est positive sur $[0, +\infty[$, négative sur $]-\infty, 0]$ et s'annule et change de signe en 0.

Donc f est convexe sur $[0, +\infty[$, concave sur $]-\infty, 0]$ et le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

4. T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est-à-dire $y = -3x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-3x) = x^3$ est du signe de x. Donc $\mathscr{C}$ est en-dessous de T sur $]-\infty, 0]$ et au-dessus de T sur $[0, +\infty[$.

5. En regroupant les informations obtenues aux questions précédentes, on obtient la figure suivante :



6. (a) Soit a un réel tel que $|a| < 2$, c'est-à-dire $-2 < a < 2$.
   - D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$. Donc f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $f([1, +\infty[) = [-2, +\infty[$ (d'après le théorème de la bijection).
     Or $-a \in [-2, +\infty[$. Donc $-a$ admet un unique antécédent α par f dans $[1, +\infty[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution α dans $[1, +\infty[$.
   - D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0, 1[$. D'après la question 1, f est impaire sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-1, 1[$. Donc f réalise une bijection de $]-1, 1[$ vers $f(]-1, 1[) =]-2, 2[$ (d'après le théorème de la bijection).
     Or $-a \in]-2, 2[$. Donc $-a$ admet un unique antécédent β par f dans $]-1, 1[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution β dans $]-1, 1[$.
   - D'après la question 2, la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. D'après la question 1, f est impaire sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$. Donc f réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ vers $f(]-\infty, -1]) =]-\infty, 2]$ (d'après le théorème de la bijection).
     Or $-a \in]-\infty, 2]$. Donc $-a$ admet un unique antécédent γ par f dans $]-\infty, -1]$. Autrement dit, l'équation $f(x) = -a$ possède une unique solution γ dans $]-\infty, -1]$.

   Finalement, l'équation $x^3 - 3x - a = 0$ possède exactement trois solutions réelles distinctes α, β et γ.

   (b) Supposons que $|a| > 2$, c'est-à-dire $a > 2$ ou $a < -2$. On distingue deux cas.
   - Si $-a > 2$, alors $-a \notin f(]-\infty, 1])$ et $-a \in f(]1, +\infty[)$, donc d'après la question précédente, l'équation $f(x) = -a$ admet une unique solution réelle, qui appartient à $]1, +\infty[$.
   - Si $-a < 2$, alors $-a \notin f([-1, +\infty[)$ et $-a \in f(]-\infty, -1[)$, donc d'après la question précédente, l'équation $f(x) = -a$ admet une unique solution réelle, qui appartient à $]-\infty, -1[$.

   Dans tous les cas, l'équation $x^3 - 3x - a = 0$ possède une unique solution réelle.

7. (a) On montre que $A_a^3 - 3A_a + aI_3 = 0$.

   (b) Comme $-a + 3\lambda = \lambda^3$, on a :

$$A_aX = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ -a + 3\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^2 \\ \lambda^3 \end{pmatrix} = \lambda X.$$

   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On montre l'équivalence par double implication :

   $\Rightarrow$ Supposons que λ est valeur propre de A_a. D'après la question 7.(a), $X^3 - 3X + a$ est un polynôme annulateur de A_a. Donc $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$ (car les valeurs propres sont parmi les racines des polynômes annulateurs).

   $\Leftarrow$ Supposons que $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$. Alors d'après la question précédente, en posant $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$, on a $X \neq 0$ et $A_aX = \lambda X$, donc λ est valeur propre de A_a (et X est un vecteur propre associé).

8. (a) D'après la question 7.(c), λ est valeur propre de $A_2 \Leftrightarrow \lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$.
   On remarque que 1 est une racine évidente du polynôme $x^3 - 3x + 2$. On factorise (par identification ou par division euclidienne) :

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)^2(x + 2).$$

   Donc $Sp(A_2) = \{-2, 1\}$. On détermine les sous-espaces propres associés. Après calculs, on obtient :

- $E_{-2}(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-2}(A_2)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice.
- $E_1(A_2) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_1(A_2)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice.

(b) Par concaténation des bases des sous-espaces propres $E_{-2}(A_2)$ et $E_1(A_2)$ (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ce n'est pas une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ car elle est de cardinale 2 et $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$. On ne peut donc pas trouver de base de vecteurs propres de A_2 et cette matrice n'est donc pas diagonalisable.

9. D'après la question 6.(b), l'équation $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$ possède une unique solution α réelle. Autrement dit, d'après la question 7.(c), A_a possède une unique valeur propre α. Montrons par l'absurde que A_a n'est pas diagonalisable.

   On suppose A_a diagonalisable. Alors, puisque $Sp(A_a) = \{\alpha\}$, il existe une matrice inversible P d'ordre 3 telle que :

$$A = P\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\0 & \alpha & 0\\0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}P^{-1} = P\alpha I_3P^{-1} = \alpha PI_3P^{-1} = \alpha I_3.$$

   Ceci est absurde donc A_a n'est pas diagonalisable.

10. (a) D'après la question 6.(a), la matrice A_a carrée d'ordre 3 possède 3 valeurs propres distinctes α, β, γ.

    D'après la question 7.(b), $\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à α, $\begin{pmatrix}1\\\beta\\\beta^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à β et $\begin{pmatrix}1\\\gamma\\\gamma^2\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à γ.

    Par concaténation de familles libres (un vecteur non nul à chaque fois) des sous-espaces propres $E_\alpha(A_2)$, $E_\beta(A_2)$ et $E_\gamma(A_2)$ (valeurs propres distinctes), $\left(\begin{pmatrix}1\\\alpha\\\alpha^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\beta\\\beta^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\gamma\\\gamma^2\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme le cardinal de cette famille libre est égale à la dimension de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A_a. Donc A_a est diagonalisable.

    (b) Les colonnes de P forme une base (de vecteurs propres de A_a) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Elles sont donc linéairement indépendantes et P est inversible.
    On sait de plus d'après le cours que $A_a = PDP^{-1}$.

11. (a) y est solution de $(\mathscr{E}_0)$ si et seulement si y' est solution de $z'' - 3z = 0$.
    L'équation caractéristique de cette équation, $r^2 - 3 = 0$, a deux solutions $r_1 = -\sqrt{3}$ et $r_2 = \sqrt{3}$.
    Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E}_0)$ s'il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = \lambda e^{-\sqrt{3}x} + \mu e^{\sqrt{3}x}.$$

(b) Les solution de $(\mathscr{E}_0)$ sont donc les primitives des fonctions de la forme obtenue à la question précédentes, c'est-à-dire les fonctions définies par une expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\frac{\lambda}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}x} + \frac{\mu}{\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}x} + \nu,$$

où λ, μ, ν sont des réels. Or $-\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$ décrivent l'ensemble des réels lorsque λ et μ décrivent l'ensemble des réels. Ainsi, les solution de $(\mathscr{E}_0)$ sont les fonctions vérifiant une relation de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda e^{-\sqrt{3}x} + \mu e^{\sqrt{3}x} + \nu,$$

où λ, μ, ν sont des réels.

12. Soit a un réel.

$$Y' = A_aY \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ -ay + 3y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow y''' = -ay + 3y' \Leftrightarrow y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a).$$

13. (a) Comme $A_a = PDP^{-1}$ (question 10.(b)), on a donc avec la question précédente :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a) &\Leftrightarrow Y' = A_aY \\ &\Leftrightarrow Y' = PDP^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow P^{-1}Y' = DP^{-1}Y \\ &\Leftrightarrow (P^{-1}Y)' = D(P^{-1}Y) \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &\Leftrightarrow Z' = DZ. \end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente, en notant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (\mathscr{E}_a) &\Leftrightarrow Z' = DZ \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z_1' = \alpha z_1 \\ z_2' = \beta z_2 \\ z_3' = \gamma z_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} z_1(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} \\ z_2(x) = \lambda_2 e^{\beta x} \\ z_3(x) = \lambda_3 e^{\gamma x} \end{cases} \end{aligned}$$

Or $Y = PZ = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 + z_3 \\ \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3 \\ \alpha^2 z_1 + \beta^2 z_2 + \gamma^2 z_3 \end{pmatrix}$ donc y est solution de $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement s'il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_3 e^{\gamma x} \\ \lambda_1 \alpha e^{\alpha x} + \lambda_2 \beta e^{\beta x} + \lambda_3 \gamma e^{\gamma x} \\ \lambda_1 \alpha^2 e^{\alpha x} + \lambda_2 \beta^2 e^{\beta x} + \lambda_3 \gamma^2 e^{\gamma x} \end{pmatrix}$$

Ainsi, y est solution de $(\mathscr{E}_a)$ si et seulement s'il existe des réels λ_1, λ_2, λ_3 tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda_1 e^{\alpha x} + \lambda_2 e^{\beta x} + \lambda_3 e^{\gamma x}$.

(c) Dans le cas $a = 0$, les valeurs propres de A_0 sont les solutions de l'équation $x^3 - 3x = 0$, c'est-à-dire $\alpha = -\sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{3}$ et $\gamma = 0$. D'après la question précédente, les solutions de $(\mathscr{E}_0)$ sont donc les fonctions définies par l'expression de la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^{-\sqrt{3}x} + \lambda_2 e^{\sqrt{3}x} + \lambda_3.$$

On retrouve bien le résultat de la question 11.(b).

Exercice 2 (ECRICOME 2017)

1. En 0^+ :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ln(x) & \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} & -\infty \\ x^{2a} & \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} & 0 \quad (\text{car } 2a>0 \end{array}\right. \qquad \text{donc} \quad \varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty.$$

En $+\infty$, il s'agit d'une forme indéterminée "$+\infty + (-\infty)$", que l'on peut lever en utilisant les résultats de croissances comparées : comme $2a > 0$,

$$\varphi(x) = x^{2a}\left(\frac{\ln(x)}{x^{2a}} - a\right) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

2. La fonction φ est dérivable et pour tout $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - 2a^2x^{2a-1} = \frac{1-2a^2x^{2a}}{x}$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est celui du numérateur $1-2a^2x^{2a}$ qui s'annule en $x_0 = \left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$. On en déduit le tableau de variations de φ :

x	0		x_0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	$-\infty$	$\nearrow$	$\varphi(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

L'énoncé ne précise pas si une expression de $\varphi(x_0)$ en fonction de a est attendue, mais elle nous servira pour la question suivante :

$$\varphi(x_0) = \varphi\left(\left(\frac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}\right) = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{1}{2a^2}\right) - a\frac{1}{2a^2} = -\frac{1}{2a}\left(\ln(2a^2)+1\right).$$

3. Déterminons le signe de $\varphi(x_0)$, maximum de φ atteint en x_0, en fonction de a :

$$\begin{array}{rcll} \varphi(x_0) > 0 & \Leftrightarrow & -\frac{1}{2a}\left(\ln(2a^2)+1\right) > 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(2a^2)+1 < 0 & \\ & \Leftrightarrow & \ln(2a^2) < -1 & \\ & \Leftrightarrow & 2a^2 < e^{-1} & (\text{croissance de } \exp) \\ & \Leftrightarrow & a^2 < \frac{1}{2e} & \\ & \Leftrightarrow & a < \sqrt{\frac{1}{2e}} & (\text{croissance de } x \mapsto \sqrt{x} \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ (et } a>0)) \end{array}$$

D'où le tableau de signe :

a	0		$\frac{1}{\sqrt{2e}}$		$+\infty$
$\varphi(x_0)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent :

- Si $a < \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$:
  La fonction φ est continue et strictement croissante sur $]0, x_0[$, donc réalise une bijection de $]0, x_0[$ dans $]\lim_0 \varphi, \varphi(x_0)[=]-\infty, \varphi(x_0)[$; ce dernier intervalle contenant 0, il existe un unique réel $z_1 \in]0, x_0[$ tel que $\varphi(z_1) = 0$.
  De même, φ réalise une bijection (décroissante) de $]x_0, +\infty[$ dans $]-\infty, \varphi(x_0)[$ qui contient 0, donc il existe un unique réel $z_2 \in]x_0, +\infty[$ tel que $\varphi(z_2) = 0$.
- Si $a = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, alors $\varphi(x_0) = 0$ et, d'après le tableau de variation déterminé en question 2., $\varphi(x) < 0$ pour $x \neq x_0$. Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution : x_0.
- Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$, étant donné les variations de φ, cette fonction est strictement négative et l'équation $\varphi(x) = 0$ n'admet aucune solution.

4. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont de classe $\mathcal{C}^2$. Par composition avec ln et $t \mapsto t^a$ qui sont $\mathcal{C}^2$, puis par produit et somme, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

5. Pour tout $(x, y) \in U$:
$$\partial_1(f)(x,y) = \frac{1}{x}\ln(y) - ax^{a-1}y^a \quad ; \quad \partial_2(f)(x,y) = \frac{1}{y}\ln(x) - ax^a y^{a-1}.$$

6. Les points critiques de f sont les points (x, y) de U annulant le gradient de f :
$$\begin{aligned}
\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} &\Leftrightarrow \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x}\ln(y) - ax^{a-1}y^a = 0 \\ \dfrac{1}{y}\ln(x) - ax^a y^{a-1} = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}(\ln(y) - ax^a y^a) = 0 \\ \frac{1}{y}(\ln(x) - ax^a y^a) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) = ax^a y^a \\ \ln(x) = ax^a y^a \end{cases} \quad (1/x \text{ et } 1/y \text{ sont non nuls}) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(y) = ax^a y^a \\ \ln(x) = \ln(y) \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = ax^a x^a \\ x = y \end{cases} \quad (\ln \text{ est bijective sur } \mathbb{R}_+^* \text{ ; report dans } L_1) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) = 0 \\ x = y \end{cases}
\end{aligned}$$

7. Les solutions de l'équation $\varphi(x) = 0$ sont données par la question 3. On obtient donc avec la question 6 :
   - Si $a < \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2).
   - Si $a = \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$: f admet un unique point critique : (x_0, x_0).
   - Si $a > \dfrac{1}{\sqrt{2e}}$: f n'admet pas de point critique.

8. Pour tout $(x, y) \in U$:
$$\begin{cases}
\partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= \frac{-1}{x^2}\ln(y) - a(a-1)x^{a-2}y^a \\
\partial^2_{1,2}(f)(x,y) &= \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\
\partial^2_{2,1}(f)(x,y) &= \frac{1}{xy} - a^2(xy)^{a-1} \\
\partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= \frac{-1}{y^2}\ln(x) - a(a-1)x^a y^{a-2}
\end{cases}$$

9. Comme z_1 vérifie $\varphi(z_1) = \ln(z_1) - a{z_1}^{2a} = 0$, on a :

$$\partial^2_{1,1}(f)(z_1, z_1) = \frac{-1}{{z_1}^2}\underbrace{\ln(z_1)}_{=a{z_1}^{2a}} - a(a-1){z_1}^{a-2}{z_1}^{a} = -a{z_1}^{2a-2} - a(a-1){z_1}^{2a-2} = -a^2{z_1}^{2a-2}.$$

Les expressions de $\partial^2_{1,1}(f)(x, y)$ et $\partial^2_{2,2}(f)(x, y)$ étant identiques en échangeant x et y, le même calcul donne :

$$\partial^2_{2,2}(f)(z_1, z_1) = -a^2{z_1}^{2a-2}.$$

Enfin :

$$\partial^2_{1,2}(f)(z_1, z_1) = \partial^2_{2,1}(f)(z_1, z_1) = \frac{1}{{z_1}^2} - a^2\left({z_1}^2\right)^{a-1} = \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2}$$

10. On a :

$$MX_1 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}$$

donc $MX_1 = \left(\frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}\right)X_1$.

De même,

$$MX_2 = \begin{pmatrix} -a^2{z_1}^{2a-2} & \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} \\ \frac{1}{{z_1}^2} - a^2{z_1}^{2a-2} & -a^2{z_1}^{2a-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{{z_1}^2} \\ -\frac{1}{{z_1}^2} \end{pmatrix}$$

donc $MX_2 = -\frac{1}{{z_1}^2}X_2$.

Par conséquent, les nombres $\lambda_1 = \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{{z_1}^2}$ sont valeurs propres de la matrice M (et X_1, X_2 sont des vecteurs propres associés respectivement à ces deux valeurs).

Puisque (X_1, X_2) est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (famille libre car deux vecteurs non colinéaires et de cardinale égal à la dimension), il ne peut y avoir d'autre valeur propre. Donc :

$$\text{Sp}(M) = \left\{\frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2}, -\frac{1}{{z_1}^2}\right\}.$$

11. Avec les notations précédentes, clairement : $\lambda_2 < 0$.

On peut utiliser la question 2 pour déterminer le signe de λ_1 en remarquant que :

$$\lambda_1 = \frac{1}{{z_1}^2} - 2a^2{z_1}^{2a-2} = \frac{1 - 2a^2{z_1}^{2a}}{{z_1}^2} = \frac{1}{z_1}\varphi'(z_1)$$

Comme $z_1 \in]0, x_0[$, intervalle sur lequel φ' est strictement positive, on en déduit que $\lambda_1 > 0$.

Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_1, z_1) admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, donc f ne présente pas en ce point d'extremum local (il s'agit d'un point col).

12. En (z_2, z_2), les calculs sont similaires et on obtient :

$$\text{Sp}\big(\nabla^2(f)(z_2, z_2)\big) = \Bigg\{\underbrace{\frac{1}{{z_2}^2} - 2a^2{z_2}^{2a-2}}_{=\lambda'_1}, \underbrace{-\frac{1}{{z_2}^2}}_{=\lambda'_2}\Bigg\}.$$

Comme en question 11 :

$$\lambda'_1 = \frac{1}{z_2}\varphi'(z_2).$$

Mais ici, comme z_2 est dans $]x_0, +\infty[$, intervalle sur lequel φ' est strictement négative, on en déduit que $\lambda'_1 < 0$.

Par conséquent, la matrice hessienne de f au point critique (z_2, z_2) admet deux valeurs propres strictement négatives, donc f présente en ce point un maximum local.

Exercice 3 (ECRICOME 2002)

1. (a) On effectue n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$ et X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$X(\Omega) = [\![0;n]\!] \quad , \quad \forall k \in [\![0;n]\!], \quad P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et X admet une espérance et une variance qui valent :

$$E(X) = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}.$$

(b) i. Voici le programme complété :

```
n = input('Entrer le nombre n de tirages : ')
s = rd.binomial(n, 1/2, 1000)
```

ii. On ajoute l'instruction `print(np.mean(s))` .

2. Pour avoir $(Y = k)$ il faut que les $(k-1)$ premiers tirages aient donné une boule noire et le k-ième une boule blanche donc

$$(Y = k) = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

et par indépendance des tirages :

$$P(Y=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Pour avoir $Y = 0$ il faut n'avoir tiré que des boules noires donc

$$(Y = 0) = N_1 \cap \cdots \cap N_n$$

et par indépendance des tirages :

$$P(Y=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

3. On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique, et on prend bien garde à séparer la valeur $k = 0$:

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1.$$

4. Montrons la formule par récurrence sur $n \geq 1$:

Ini. On a

$$\sum_{k=1}^{1} kx^k = x$$

et

$$\frac{x^{1+2}-(1+1)x^{1+1}+x}{(1-x)^2} = \frac{x\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)^2} = x\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} = x.$$

donc la propriété est vraie au rang $n = 1$.

Héré. Soit $n \geq 1$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} kx^k &= \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1} \\
&= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2} + \frac{(n+1)x^{n+1}(1-2x+x^2)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x+(n+1)x^{n+1}-2(n+1)x^{n+2}+(n+1)x^{n+3}}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} \times \left(x + x^{n+1}\left[-(n+1)+(n+1)\right] + x^{n+2}\left[n-2n-2\right] + (n+1)x^{n+3}\right) \\
&= \frac{(n+1)x^{(n+1)+2} - ((n+1)+1)x^{(n+1)+1} + x}{(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ccl. Par le principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

5. Y est finie donc admet une espérance, qu'on calcule à l'aide de la formule précédente :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k + 0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4\left(\frac{n}{2^{n+2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{n}{2^n} - \frac{2n+2}{2^n} + 2 = 2 - \frac{n+2}{2^n}.
\end{aligned}$$

6. Z_p est le nombre de boules blanches qui ont été tirées lors des p premiers tirages.

7. $X_1(\Omega) = \{0;1\}$ et

$$(X_1 = 0) = N_1 \quad \text{et} \quad (X_1 = 1) = B_1$$

donc

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$$

X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc admet une espérance qui vaut :

$$E(X_1) = \frac{1}{2}.$$

8. On a tout d'abord :

$$X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0;1\}$$

puis :

$$P\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)\right) = P\left(X_1 = 1\right) P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1+c}{2+c} = \frac{1+c}{4+2c}$$

car si $X_1 = 1$, on a tiré une boule blanche donc on a une boule noire et $(1+c)$ boule blanche pour le 2e tirage.

De même

$$P\left((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)\right) = P\left(X_1 = 1\right) P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+c} = \frac{1}{4+2c}.$$

$$P\left((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)\right) = P\left(X_1 = 0\right) P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2+c} = \frac{1}{4+2c}.$$

$$P\left((X_1=0)\cap(X_2=0)\right)=P\left(X_1=0\right)P_{(X_1=0)}(X_2=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1+c}{2+c}=\frac{1+c}{4+2c}.$$

D'où comme $((X_1=1),(X_1=0))$ est un SCE et par probabilité totales :

$$P\left(X_2=1\right)=P\left((X_1=0)\cap(X_2=1)\right)+P\left((X_1=1)\cap(X_2=1)\right)=\frac{1+1+2c}{4+2c}=\frac{2+2c}{2(2+2c)}=\frac{1}{2}.$$

Enfin $(X_2=0)=\overline{(X_2=1)}$ donc

$$P\left(X_2=0\right)=\frac{1}{2}$$

et X_2 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ donc admet une espérance qui vaut :

$$E(X_2)=\frac{1}{2}.$$

9. $Z_2\left(\Omega\right)=\{0;1;2\}$ et en décomposant selon les valeurs du couple (X_1,X_2) :

$$\begin{aligned}
P(Z_2=0) &= P((X_1=0)\cap(X_2=0))=\frac{1+c}{4+2c},\\
P(Z_2=1) &= P\left[\Big((X_1=0)\cap(X_2=1)\Big)\cup\Big((X_1=1)\cap(X_2=0)\Big)\right]\\
&= P((X_1=0)\cap(X_2=1))+P((X_1=1)\cap(X_2=0))\\
&= \frac{2}{4+2c},\\
P(Z_2=2) &= P((X_1=1)\cap(X_2=1))=\frac{1+c}{4+2c}.
\end{aligned}$$

10. $Z_p\left(\Omega\right)=\{0;1;2;\dots;p\}$.

11. (a) Si $Z_p=k$, on a tiré k boules blanches donc rajouté kc boules blanches : il y en a donc $1+kc$.

    Après p tirages le total de boules est de $2+pc$ (on en rajoute c à chaque tirage). D'où

$$P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)=\frac{1+kc}{2+pc}.$$

    (b) Comme $[(Z_p=0),(Z_p=1),\dots,(Z_p=p)]$ est un système complet d'évènements, on a par incompatibilité puis avec la formule des probas composées :

$$\begin{aligned}
P(X_{p+1}=1) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{p}(Z_p=k)\cap(X_{p+1}=1)\right)=\sum_{k=0}^{p}P((Z_p=k)\cap(X_{p+1}=1))\\
&= \sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\times P_{(Z_p=k)}(X_{p+1}=1)=\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)\frac{1+kc}{2+pc}\\
&= \frac{1}{2+pc}\left(\sum_{k=0}^{p}P(Z_p=k)+c\sum_{k=0}^{p}kP(Z_p=k)\right)\\
&= \frac{1}{2+pc}\times(1+cE(Z_p))=\frac{1+cE(Z_p)}{2+pc}.
\end{aligned}$$

    (c) Montrons par récurrence sur $1\le p\le n$ que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$:

    Ini. On a déjà vu que X_1 et X_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Héré. Soit $1 \leq p \leq n-1$. Supposons que $X_1,\ X_2, \cdots, X_p$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
Alors par linéarité de l'espérance

$$E(Z_p) = \sum_{i=1}^{p} E(X_i) = \frac{p}{2}$$

D'autre part on a $X_{p+1}(\Omega) = \{0;1\}$ et :

$$P(X_{p+1}=1) = \frac{1+\frac{pc}{2}}{2+pc} = \frac{\frac{2+pc}{2}}{2+pc} = \frac{2+pc}{2} \times \frac{1}{2+pc} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$P(X_{p+1}=0) = 1 - P(X_{p+1}=1) = \frac{1}{2}$$

et X_{p+1} est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Ccl. Pour tout $p \in \{1;2;\dots;n\}$, X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Remarque : le jeu étant parfaitement symétrique, il est normal qu'il y ait autant de chance de tirer une boule blanche ou une boule noire au p-ième tirage pour tout p : ce résultat est donc naturel et on aurait pu l'obtenir directement en inversant le rôle des boules blanches et des boules noires pour montrer que $P(X_p=1) = P(X_p=0)$ puis que chacune vaut $\frac{1}{2}$.

12. Voici le programme demandé :

```python
c = input('entrer la valeur de c')
X = np.zeros(10)

n = 1
b = 1
for i in range(10):
    if rd.random() < b/(b+n) :
        X[i] = 1
        n = n
        b = b+c
    else:
        X[i] = 0
        n = n+c
        b = b
print(X)
```