Correction - DS 7 (A)

Devoir surveillé du Samedi 18 Janvier

Exercice 1 (ECRICOME 2016)

1. (a) On a :

$$E = \{M(x,y), x, y \in \mathbb{R}\} = Vect\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}\right) = Vect(A, B).$$

Donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

(b) On montré à la question précédente que la famille (A, B) est génératrice de E. Elle est libre car A et B sont non colinéaires. C'est donc une base de E et E est de dimension 2.

2. (a) • Pour $E_1(A)$:

$$(A - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +2z & = 0 \\ -x & +3y & -2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \\ & 4y & -2z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ z = 2y \end{array}\right.$$

Comme $E_1(A) \neq \{0\}$, 1 est bien valeur propre de A. De plus,

$$E_1(A) = \left\{\begin{pmatrix} -y \\ y \\ 2y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = Vect(X_1)$$

avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (c'est une base de $E_1(A)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice).

• Pour $E_2(A)$:

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +2z & = 0 \\ -x & +2y & -2z & = 0 \\ & 4y & -3z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{rrrl} x & -2y & +2z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & 4y & -3z & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{2}{3}y \\ z = \dfrac{4}{3}y \end{array}\right.$$

Comme $E_2(A) \neq \{0\}$, 2 est bien valeur propre de A. De plus,

$$E_2(A) = \left\{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3}y \\ y \\ \frac{4}{3}y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R}\right\} = Vect(X_2)$$

avec $X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ (c'est une base de $E_2(A)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice).

- Pour $E_3(A)$:

$$(A-3I)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrl} & -2y & +2z & =0\\ -x & +y & -2z & =0\\ & 4y & -4z & =0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-y\\ z=y\end{array}\right.$$

Comme $E_3(A)\neq\{0\}$, 3 est bien valeur propre de A. De plus,

$$E_3(A)=\left\{\begin{pmatrix}-y\\y\\y\end{pmatrix} \mid y\in\mathbb{R}\right\}=Vect(X_3)$$

avec $X_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ (c'est une base de $E_3(A)$ car libre (un vecteur non nul) et génératrice).

(b) X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres associés à 3 valeurs propres distinctes. Donc (X_1,X_2,X_3) est une famille libre (par concaténation de familles libres) de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3. C'est donc une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. Donc A est diagonalisable.

(c) En posant

$$P=\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix} \text{ et } D_A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},$$

on a alors $A=PD_AP^{-1}$.

(d) Utilisons la méthode du pivot pour déterminer P^{-1}.

$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&3&-1\\-2&4&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{ On fait } L_2\leftarrow L_2+L_1 \text{ et } L_2\leftarrow L_3+2L_1$$
$$\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \text{ On fait } L_1\leftarrow L_1-L_3$$
$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1&0&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \text{ On fait } L_1\leftarrow L_1+2L_2$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \text{ On fait } L_1\leftarrow L_1+2L_2$$

On peut donc conclure que P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\1&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}$.

3. (a) On a $BX_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $BX_2=\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}=-X_2$ et $BX_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}=-X_3$.

Comme X_1, X_2 et X_3 sont non nuls, ils sont donc vecteurs propres de B associés respectivement aux valeurs propres 0, -1 et -1.

(b) On a vu que (X_1,X_2,X_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Donc B est diagonalisable et on a :

$$B=PD_BP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

4. (a) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(x,y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} = PD(x,y)P^{-1}$$

où $D(x,y) = xD_A + yD_B$.

(b) Comme $M(x,y)$ et $D(x,y)$ sont semblables, $M(x,y)$ est inversible si et seulement si $D(x,y)$ est inversible. En effet :

- $\Leftarrow$ Si $D(x,y)$ est inversible, alors $M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
- $\Rightarrow$ Si $M(x,y)$ est inversible, alors $D(x,y) = P^{-1}M(x,y)P$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Or, comme $D(x,y)$ est diagonale,

$$D(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x-y & 0 \\ 0 & 0 & 3x-y \end{pmatrix} \text{ est inversible } \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ 2x - y \neq 0 \\ 3x - y \neq 0 \end{cases}$$

Donc $M(x,y)$ est inversible si et seulement si $x \neq 0$, $2x - y \neq 0$ et $3x - y \neq 0$.

5. On a $B^2 = PD_BP^{-1}PD_BP^{-1} = PD_B^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1} = -PD_BP^{-1} = -B \in E$.

De même, on a :

$$A^2 = PD_AP^{-1}PD_AP^{-1} = PD_A^2P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} A^2 \in E \quad & \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ A^2 = xA + yB \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = xD_A + yD_B \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 \\ 2x - y = 4 \\ 3x - y = 9 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \exists x,y \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ y = -6 \end{cases} \qquad \to \text{Impossible !} \end{aligned}$$

Donc $A^2 \notin E$.

Exercice 2 (ECRICOME 2004)

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. De plus :

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} = f(x).$$

Donc f est paire sur $\mathbb{R}$.

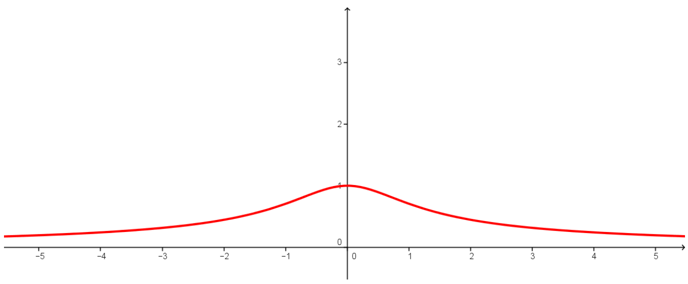
2. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (2x) \times (1+x^2)^{3/2} = \frac{-x}{(1+x^2)^{3/2}}.$$
On a donc le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	

3. Comme $\sqrt{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

4. D'après les deux questions précédentes, f est minorée par 0 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}^+$. Par parité, f est également minorée par 0 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}^-$.
Donc f est bien bornée sur $\mathbb{R}$.

5. Il faut tracer les asymptotes $(y=0)$ en $\pm\infty$ et la tangente horizontale en 0.
Il faut respecter le sens de variation sur $\mathbb{R}_+$ et compléter par symétrie par rapport à l'axe (Oy).
On obtient la courbe suivante :



6. Comme f est continue et strictement décroissantes sur $[0,+\infty[$, elle est bijective de $[0,+\infty[$ dans $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right] =]0,1] = J$ d'après le théorème de la bijection.

7. Soit $y \in]0,1]$. On cherche $x \in [0,+\infty[$ tel que $f(x) = y$. Alors :
$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = y \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = \frac{1}{y} \quad \text{car } y > 0 \\ &\Leftrightarrow 1+x^2 = \frac{1}{y^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} \quad \text{car } x \geq 0 \text{ et } y > 0. \end{aligned}$$
Donc l'unique solution de l'équation sur $\mathbb{R}^+$ est $x = \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$.

8. Comme f est bijective de $[0,+\infty[$ dans $]0,1]$, elle admet une bijection réciproque définie par :
$$f^{-1}:\left\{\begin{array}{rcl}]0,1] & \to & [0,+\infty[\\ y & \mapsto & \text{l'unique antécédent de } y \text{ par } f. \end{array}\right.$$
Pour tout $y\in\,]0,1]$ et $x\in\mathbb{R}_+$, on a $f(x)=y \Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc :
$$f^{-1}:\left\{\begin{array}{rcl}]0,1] & \to & [0,+\infty[\\ y & \mapsto & \dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y} \end{array}\right.$$

9. Raisonnons par construction.
Soit $x\in\mathbb{R}$. $x^2+1>x^2$ donc, comme $x\mapsto\sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$. Or $|x|=x\geq -x$ si $x\geq 0$ et $|x|=-x\geq -x$ si $x\leq 0$. Donc $\sqrt{x^2+1}>-x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+x>0$.
Finalement, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}+x>0$ et F est définie sur $\mathbb{R}$.

10. F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continue et dérivables et
$$F'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=f(x).$$
Donc F est bien une primitive de f sur $\mathbb{R}$

11. F est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\begin{array}{rcl} F(-x) & = & \ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)=\ln\left(\dfrac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\ & = & \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-F(x). \end{array}$$
F est bien impaire sur son ensemble de définition.

12. Comme $x+\sqrt{1+x^2}\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$, $F(x)\underset{x\to+\infty}{\to}+\infty$ par composition avec ln.
Comme F est impaire, $F(x)\underset{x\to-\infty}{\to}-\infty$.

13. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et que F est une primitive de f, on a :
$$\mathcal{A}(\lambda)=[F(x)]_{x=\lambda}^{2\lambda}=F(2\lambda)-F(\lambda)=\ln\left(2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}\right)-\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right).$$
On cherche la limite de cette quantité en $+\infty$ (c'est une forme indéterminée). On a pour tout $\lambda>0$:
$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\lambda) & = & \ln\left(2\lambda+\sqrt{(2\lambda)^2+1}\right)-\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1}\right) \\ & = & \ln\left(2\lambda\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2\lambda^2}}\right)\right)-\ln\left(\lambda\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{\lambda^2}}\right)\right) \\ & = & \ln(2)+\ln(\lambda)+\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2\lambda^2}}\right)-\ln(\lambda)-\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{\lambda^2}}\right) \\ & = & \ln(2)+\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{2\lambda^2}}\right)-\ln\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{\lambda^2}}\right) \\ & \underset{\lambda\to+\infty}{\to} & \ln(2). \end{array}$$
Finalement, $\mathcal{A}(\lambda)\underset{\lambda\to+\infty}{\to}\ln(2)$.

14. Pour u_0 (avec la question 10) :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_{x=0}^1 = F(1) - F(0) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln(1) = \ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Pour u_1 :

$$u_1 = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 = \sqrt{2}-1.$$

15. On a $u_3 = \displaystyle\int_0^1 x^3 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2}\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Avec une IPP, les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ et $x \mapsto 2\sqrt{1+x^2}$ étant de classe C^1 sur $[0,1]$, on a :

$$\begin{aligned} u_3 &= \left[x^2\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\sqrt{1+x^2}dx = \sqrt{2} - \int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{1/2}dx \\ &= \sqrt{2} - \left[\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \frac{2}{3}2^{3/2} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

16. On raisonne par construction. Si $x \in [0,1]$, alors :

$$x^n \geq x^{n+1} \Rightarrow x^n f(x) \geq x^{n+1} f(x) \quad \text{car } f(x) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

En intégrant cette inégalité pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$\int_0^1 x^{n+1} f(x)\,dx \leq \int_0^1 x^n f(x)\,dx \quad \text{et donc} \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

17. La suite (u_n) est décroissante (question 16).

Montrons qu'elle est minorée par 0 toujours par construction. Si $x \in [0,1]$, alors :

$$0 \leq x^n \Rightarrow 0 \leq x^n f(x) \quad \text{car } f(x) \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

En intégrant cette inégalité pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$0 \leq \int_0^1 x^n f(x)\,dx \quad \text{et donc} \quad 0 \leq u_n.$$

Comme (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \geq 0$ par le théorème des suites monotones.

18. On a vu que f était comprise entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$ (question 4).

Donc $0 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$. Comme $x^n \geq 0$ sur $[0,1]$ alors $0 \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.

En intégrant cette inégalité pour x allant de 0 à 1 (bornes croissantes), on a :

$$\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

19. Comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors, par encadrement, $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Exercice 3 (ECRICOME 2003)

1. Pour un objet pris à la sortie, $P(A) = 0.6$ et $P(B) = 0.4$.

   Soit D l'événement "l'objet est défectueux".

   On a $P_A(D) = 0.1$ et $P_B(D) = 0.2$. Comme (A, B) est un système complet d'événements,

$$\begin{aligned} P(D) &= P_A(D)\,P(A) + P_B(D)\,P(B) \\ &= 0.1 \cdot 0.6 + 0.2 \cdot 0.4 \\ &= 0.14 \end{aligned}$$

   Si l'objet est défectueux, la probabilité de l'événement "l'objet provient de la chaîne A" est P (A/D) que l'on calcule (formule des probas conditionnelles) :

$$\begin{aligned} P_D(A) &= \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P_A(D)P(A)}{P(D)} \\ &= \frac{0.1\cdot 0.6}{0.14} = \frac{0.06}{0.14} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier n, $P(Y = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$, et $E(Y) = V(Y) = \lambda = 20$.

   (b) Quand $(Y = n)$, X est le nombre d'objet défectueux parmi n qui sont défectueux indépendamment les un des autres avec une même probabilité 0.1. Donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.1)$ et

$$P_{(Y=n)}(X = k) = 0 \text{ si } k > n \text{ et } P_{(Y=n)}(X = k) = \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \text{ si } k \leq n$$

   (c) Comme $(Y = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, on a pour tout entier k :

$$P(X = k) = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} (Y = n)\cap(X = k)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{(Y=n)}(X = k)P(Y = n)$$

   par incompatibilité et la formule des probabilités composées.
   En distinguant suivant que $n \geq k$ ou $n < k$:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=0}^{k-1} P_{(Y=n)}(X = k)P(Y = n) + \sum_{n=k}^{+\infty} P_{(Y=n)}(X = k)P(Y = n) \\ &= 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} 0.1^k 0.9^{n-k} \frac{20^n e^{-20}}{n!} \\ &= \left(\frac{0.1}{0.9}\right)^k e^{-20} \sum_{n=k}^{M} \frac{n!}{k!\,(n-k)!n!} (0.9\cdot 20)^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{(n-k)!} 18^n \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} 18^{m+k} \\ &= \left(\frac{1}{9}\right)^k e^{-20} \frac{1}{k!} 18^k e^{18} = \frac{2^k e^{-2}}{k!} \end{aligned}$$

   Donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$

3. On vérifie les caractéristiques d'une densité :

   - f est positive sur $\mathbb{R}$
   - f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0.
   - On a :
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^3}dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{2}{(1+t)^3}dt.$$
   Soit $X \geq 0$.
   $$\int_0^X f = \int_0^X \frac{2}{(1+t)^3}dt = \left[-\frac{1}{(1+t)^2}\right]_0^X = 1 - \frac{1}{(1+X)^2} \to 1$$
   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1 et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

   Donc f est bien une densité de variable aléatoire.

4. On a $F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ donc

   - si $x < 0$: $F_Z(x) = 0$
   - si $x \geq 0$: $F_Z(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x f(t)dt = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}$

5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt$ n'est impropre qu'en $+\infty$ (fonction continue sur $[0, +\infty[$).

   En $+\infty$, on a un équivalent simple : $\displaystyle\frac{2t}{(1+t)^3} = \frac{2t}{t^3} \sim \frac{2}{t^2}$.

   Or l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente car $2 > 1$

   Donc par comparaison d'intégrale à termes positifs, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt$ converge.

   Soit $X \geq 0$.
   On effectue le changement de variable $u = t+1$ (de classe C^1) :
   $$\begin{aligned}\int_0^X \frac{2t}{(1+t)^3}dt &= \int_1^{X+1} \frac{2(u-1)}{u^3}du = \int_1^{X+1} \frac{2}{u^2} - \frac{2}{u^3}du \\ &= \left[\frac{-2}{u} + \frac{1}{u^2}\right]_1^{X+1} = \frac{-2}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} + 1 \\ &\to 1\end{aligned}$$
   Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt = 1$

6. Z admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge (absolument).

   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt = 0$
   - $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt = 1$ (d'après la question précédente)

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge et Z admet une espérance $E(Z) = 1$

7. Comme $\dfrac{2t^2}{(1+t)^3} \sim \dfrac{2}{t}$ dont l'intégrale diverge en $+\infty$, alors Z^2 n'a pas d'espérance et Z n'a pas de variance.

8. (a) On considère les événements $C = (Z_2 > 2)$ et $D = (Z_2 < 3)$. Alors :

$$P(C) = P(Z_2 > 2) = 1 - F_Z(2) = \frac{1}{(1+2)^2} = \frac{1}{9}$$

Comme Z_2 est à densité,

$$P(D) = P(Z_2 < 3) = F_Z(3) = 1 - \frac{1}{(1+3)^2} = \frac{15}{16}$$

Pour $P_C(D)$, on utilise la formule des probas composées :

$$\begin{aligned} P_C(D) &= \frac{P(D\cap C)}{P(C)} = \frac{P(2 < Z_2 < 3)}{P(C)} = \frac{P(2 < Z_2 \leq 3)}{P(C)} \qquad \text{(car } Z_2 \text{ à densité)} \\ &= \frac{F(3) - F(2)}{P(C)} = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

(b) i. Le plus grand est inférieur à x signifie qu'ils sont chacun inférieur à x.
Donc $(T \leq x) = (Z_1 \leq x) \cap (Z_2 \leq x)$

ii. Comme les deux sont indépendantes,

$$G_T(x) = P(Z_1 \leq x)\, P(Z_2 \leq x) = [F_Z(x)]^2$$

iii. Il suffit de montrer que la fonction de répartition de T est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.
Or F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (fonction de répartition d'une variable à densité).
Donc comme composée, G_T l'est aussi et T est une variable aléatoire à densité de densité :

$$g(t) = G'(t) = 2F_Z(t)\, f(t)$$

On donne arbitrairement cette valeur en 0 également.

(c) Le temps total de fabrication est la somme des temps de passage sur A et B.
Donc $S = Z_1 + Z_2$ et le temps moyen de fabrication d'une pièce est :

$$E(S) = E(Z_1) + E(Z_2) = 1 + 1 = 2.$$