Algèbres de contraction et forêts préordonnées

Anthony Mansuy

30 avril 2013

Une algèbre est une famille $(A, m, 1_A)$ où :

1. A est un K-espace vectoriel.
2. $m : A \times A \longrightarrow A$ est bilinéaire. On note $m(x, y) = x.y$.
3. $1_A \in A$.

Avec les axiomes suivants :

1. Associativité : pour tous $x, y, z \in A$, $(x.y).z = x.(y.z)$.
2. Unité : pour tout $x \in A$, $1_A.x = x.1_A = x$.

On reformule ces axiomes en termes de diagrammes commutatifs. Pour cela il faut linéariser m et 1_A :

$$m : \begin{cases} A \otimes A & \longrightarrow & A \\ x \otimes y & \longrightarrow & x.y \end{cases} \qquad \nu : \begin{cases} K & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longrightarrow & \lambda.1_A. \end{cases}$$

Les axiomes s'expriment alors de la manière suivante :

Associativité

$$m \circ (m \otimes Id) = m \circ (Id \otimes m)$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes Id"] \arrow[d, "Id\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A \end{tikzcd}$$

Unité

$$m \circ (Id \otimes \nu) = m \circ (\nu \otimes Id) = Id$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "\nu\otimes Id"] \arrow[dr, "\approx"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] & A \otimes K \arrow[l, "Id\otimes\nu"'] \arrow[dl, "\approx"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Une cogèbre est une famille (C, Δ, ε), où :

1. C est un K-espace vectoriel.
2. $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ est une application linéaire.
3. $\varepsilon : C \longrightarrow K$ est une application linéaire.

Avec les axiomes suivants (obtenus en dualisant les axiomes pour les algèbres) :

Coassociativité

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta$$

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta\otimes Id"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "Id\otimes\Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

Counité

$$(\varepsilon \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \varepsilon) \circ \Delta = Id$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\varepsilon\otimes Id"'] \arrow[r, "Id\otimes\varepsilon"] & C \otimes K \\ & C \arrow[ul, "\approx"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\approx"'] & \end{tikzcd}$$

Notations de Sweedler : pour tout $x \in C$, on écrit :

$$\Delta(x) = \sum_x x^{(1)} \otimes x^{(2)}.$$

Les axiomes de cogèbre se reformulent alors :

1. Coassociativité : pour tout $x \in C$,

$$\sum_{x,x^{(1)}} \left(x^{(1)}\right)^{(1)} \otimes \left(x^{(1)}\right)^{(2)} \otimes x^{(2)} = \sum_{x,x^{(2)}} x^{(1)} \otimes \left(x^{(2)}\right)^{(1)} \otimes \left(x^{(2)}\right)^{(2)}.$$

2. Counité : pour tout $x \in C$,

$$\sum_x \varepsilon\left(x^{(1)}\right) x^{(2)} = \sum_x x^{(1)} \varepsilon\left(x^{(2)}\right) = x.$$

Soient A une algèbre et C une cogèbre. Alors :

- $A \otimes A$ est une algèbre :

$$\begin{aligned}(x_1 \otimes y_1).(x_2 \otimes y_2) &= x_1.x_2 \otimes y_1.y_2, \\ 1_{A \otimes A} &= 1_A \otimes 1_A.\end{aligned}$$

- $C \otimes C$ est une cogèbre :

$$\begin{aligned}\Delta(x \otimes y) &= \sum_{x,y} \left(x^{(1)} \otimes y^{(1)}\right) \otimes \left(x^{(2)} \otimes y^{(2)}\right), \\ \varepsilon(x \otimes y) &= \varepsilon(x)\varepsilon(y).\end{aligned}$$

Soient A et B deux algèbres et $\Phi : A \to B$ une application linéaire. Alors Φ est un morphisme d'algèbres si

$$\begin{aligned} m_B \circ (\Phi \otimes \Phi) &= \Phi \circ m_A, \\ \Phi \circ \nu_A &= \nu_B. \end{aligned}$$

Soient C et D deux cogèbres et $\Phi : C \to D$ une application linéaire. Alors Φ est un morphisme de cogèbres si (en dualisant les axiomes pour les algèbres)

$$\begin{aligned} \Delta_D \circ \Phi &= (\Phi \otimes \Phi) \circ \Delta_C, \\ \varepsilon_D \circ \Phi &= \varepsilon_C. \end{aligned}$$

Lemme

Si B est à la fois une algèbre et une cogèbre, les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.
2. m et ν sont des morphismes de cogèbres.

Si ces conditions sont satisfaites, on dira que B est une bigèbre.

Autrement dit, dans une bigèbre :

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = \sum_{x,y} x^{(1)}.y^{(1)} \otimes x^{(2)}.y^{(2)},$$

$$\varepsilon(x.y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y),$$

$$\Delta(1_A) = 1_A \otimes 1_A, \qquad \varepsilon(1_A) = 1.$$

Une algèbre de Hopf est une bigèbre avec une condition supplémentaire (existence d'un antipode).

Exemples

- Soit G un groupe. L'algèbre du groupe G est une algèbre de Hopf, avec le coproduit défini par $\Delta(g) = g \otimes g$ pour tout $g \in G$. La counité est donnée par $\varepsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G$.
- Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. L'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre engendrée par les éléments de $\mathfrak{g}$ et les relations :

$$x.y - y.x = [x, y] \text{ pour tous } x, y \in \mathfrak{g}.$$

  Il s'agit d'une algèbre de Hopf, dont le coproduit est donné par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. La counité est donnée par $\varepsilon(x) = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

Nous présentons deux exemples importants :

- Les algèbres de Hopf de battage et de battage contractant (voir [H]) : elles sont utilisées en théorie des algèbres de Hopf combinatoires, en analyse (intégrales itérées), en analyse complexe (fonctions multizêtas)...
- L'algèbre de Hopf des arbres enracinés de Connes-Kreimer (voir [CK]) : elle est utilisée en théorie des champs quantiques, des algèbres de Hopf combinatoires, des opérades, en analyse complexe (calcul moulien et arborification)...

Soit $\mathcal{D}$ un ensemble.
L'algèbre de Hopf de battage $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$ a pour base l'ensemble des mots en l'alphabet $\mathcal{D}$.

- Son produit $\times_{Sh}$ est donné par les battages des mots. Par exemple :

$$\begin{aligned}(abc) \times_{Sh} (d) &= (abcd) + (abdc) + (adbc) + (dabc),\\ (ab) \times_{Sh} (cd) &= (abcd) + (acbd) + (cabd)\\ &\quad +(acdb) + (cadb) + (cdab).\end{aligned}$$

- Son coproduit est donné par la déconcaténation. Par exemple :

$$\begin{aligned}\Delta(abcd) &= (abcd) \otimes 1 + (abc) \otimes (d) + (ab) \otimes (cd)\\ &\quad +(a) \otimes (bcd) + 1 \otimes (abcd).\end{aligned}$$

Exemple

Soient $\mathcal{D}$ un ensemble et $(f_a)_{a\in\mathcal{D}}$ des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ intégrables. Posons :

$$I(a_1 \dots a_k) = \int_0^1 f_{a_k}(x_k)dx_k \int_0^{x_k} f_{a_{k-1}}(x_{k-1})dx_{k-1} \dots \int_0^{x_2} f_{a_1}(x_1)dx_1$$

Alors I est un caractère de $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire :

$$I(a_1 \dots a_p)I(b_1 \dots b_q) = I\left((a_1 \dots a_p) \times_{Sh} (b_1 \dots b_q)\right).$$

Par exemple :

$$\begin{aligned} I(a)I(b) &= \int_0^1 f_a(x)dx \int_0^1 f_b(y)dy \\ &= \int_0^1 f_a(x)dx \int_0^x f_b(y)dy + \int_0^1 f_b(y)dy \int_0^y f_a(x)dx \\ &= I(ba) + I(ab). \end{aligned}$$

Supposons de plus que $\mathcal{D}$ est muni d'un produit $[\cdot,\cdot] : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$.
L'algèbre de Hopf de battage contractant $\mathbf{Csh}^{\mathcal{D}}$ a aussi pour base l'ensemble des mots en l'alphabet $\mathcal{D}$.

- Son produit $\times_{Csh}$ est donné par les battages des mots avec contractions éventuelles des lettres. Par exemple :

$$\begin{aligned}
(ab) \times_{Csh} (c) &= (abc) + (acb) + (cab) + (a[b,c]) \\
&\quad + ([a,c]b) \\
(ab) \times_{Csh} (cd) &= (ab) \times_{Sh} (cd) + (a[b,c]d) \\
&\quad + (c[a,d]b) + ([a,c]bd) + ([a,c]db) \\
&\quad + (ac[b,d]) + (ca[b,d]) + ([a,c][b,d])
\end{aligned}$$

- Son coproduit est la déconcaténation, comme pour $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$.

Exemple

Soient $s_1, \ldots, s_k \in \mathbb{N}^*$, $s_1 \geq 2$. On pose :

$$\zeta(s_1 \ldots s_k) = \sum_{n_1 > \ldots > n_k > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \ldots n_k^{s_k}}.$$

Alors ζ est un caractère de $\mathbf{Csh}^{\mathcal{D}}$, c'est-à-dire :

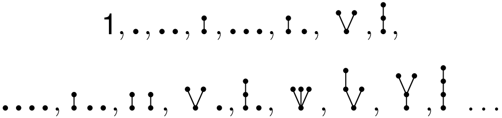
$$\zeta(s_1 \ldots s_p)\zeta(t_1 \ldots t_q) = \zeta((s_1 \ldots s_p) \times_{Csh} (t_1 \ldots t_q)).$$

Par exemple (avec ici $[a, b] = a + b$) :

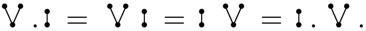
$$\begin{aligned} \zeta(s)\zeta(t) &= \sum_{n>0, m>0} \frac{1}{n^s m^t} \\ &= \sum_{n>m>0} \frac{1}{n^s m^t} + \sum_{m>n>0} \frac{1}{n^s m^t} + \sum_{n>0} \frac{1}{n^{s+t}} \\ &= \zeta(st) + \zeta(ts) + \zeta(s+t). \end{aligned}$$

L'algèbre des arbres enracinés $\mathbf{H}_{CK}$ est introduite par Connes et Kreimer pour la Renormalisation en Théorie des Champs Quantiques.

- Une base de cette algèbre est donnée par les forêts enracinées :



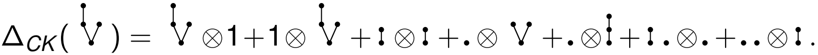
- Le produit est donné par l'union disjointe des forêts.



- Le coproduit est donné par les coupes admissibles :

$$\Delta_{CK}(F) = \sum_{\boldsymbol{c} \text{ coupe admissible}} Lea_{\mathbf{c}}(F) \otimes Roo_{\mathbf{c}}(F).$$

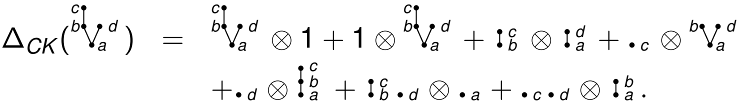
coupe $\boldsymbol{c}$									totale
Admissible ?	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
$Roo_{\mathbf{c}}(F)$					$\times$	$\bullet$		$\times$	1
$Lea_{\mathbf{c}}(F)$	1		$\bullet$	$\bullet$	$\times$		$\bullet\ \bullet$	$\times$	



- La counité est donné par :

$$\begin{array}{rcl} \varepsilon(1) & = & 1, \\ \varepsilon(F) & = & 0 \text{ si } F \neq 1. \end{array}$$

Si $\mathcal{D}$ est un alphabet, on peut construire l'algèbre de Hopf $\mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$ des arbres enracinés décorés par $\mathcal{D}$. Par exemple, si $a, b, c, d \in \mathcal{D}$,



Définition

Un ordre linéaire sur une forêt $F \in \mathbf{H}_{CK}$ à n sommets est une application bijective $\sigma : V(F) \to \{1, \dots, n\}$ telle que si, $a, b \in V(F)$,

$$(a \twoheadrightarrow b \text{ dans } F) \Longrightarrow (\sigma(a) \geq \sigma(b)).$$

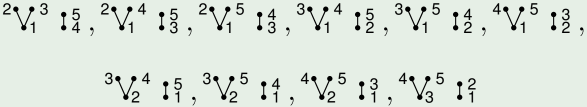
On note $\mathcal{O}(F)$ l'ensemble des ordres linéaires sur F.

Exemples

- Si $F =$  , les ordres linéaires possibles sur F sont :

Exemples

- Si $F =$  , les ordres linéaires possibles sur F sont :



Théorème

L'application Φ suivante définit un morphisme surjectif de l'algèbre de Hopf des forêts $\in \mathbf{H}^{\mathcal{D}}_{CK}$ vers $\mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$:

$$F \text{ forêt de degré } n \xrightarrow{\Phi} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}(F)} \sigma^{-1}(n) \ldots \sigma^{-1}(1),$$

où $\sigma^{-1}(i)$ est la décoration associée au sommet d'image par σ égale à i.

Exemples

$$
\begin{array}{rcl}
\Phi(\bullet_a) & = & (a),\\
\Phi\left(\begin{smallmatrix}\bullet\, b\\ |\\ \bullet\, a\end{smallmatrix}\right) & = & (ba),\\
\Phi(\bullet_a \bullet_b) & = & (ab)+(ba),\\
\Phi\left(\begin{smallmatrix}\bullet\, c\\ |\\ \bullet\, b\\ |\\ \bullet\, a\end{smallmatrix}\right) & = & (cba),\\
\Phi\left({}^{b}\!\vee^{c}_{a}\right) & = & (bca)+(cba),\\
\Phi\left(\bullet_a \begin{smallmatrix}\bullet\, c\\ |\\ \bullet\, b\end{smallmatrix}\right) & = & (cba)+(cab)+(acb),\\
\Phi(\bullet_a \bullet_b \bullet_c) & = & (abc)+(acb)+(bac)+(bca)+(cab)+(cba).
\end{array}
$$

On a donc :

- un morphisme d'algèbres $I : \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$,
- un morphisme d'algèbres surjectif $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$.

On définit alors un morphisme d'algèbres $J : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbb{R}$.

Exemple

$$J({}^{b}\!\vee_{a}{}^{c}) = \int_0^1 f_a(x)dx \int_0^x f_b(y)dy \int_0^x f_c(z)dz.$$

Applications : Convergence d'intégrales (ex : Calcul moulien avec l'arborification)

Notons $\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}$ l'ensemble des arbres enracinés décorés par $\mathcal{D}$.
Soit $\varphi : K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \to K(\mathcal{D})$ une application linéaire.

Théorème

Il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & K(\mathcal{D}) \\ \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}} \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On cherche à donner une description combinatoire de Φ.

Exemples

- En degré 1, $\Phi(\bullet_a) = \varphi(\bullet_a)$.
- En degré 2,

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{I}\substack{b\\a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\mathbf{I}\substack{b\\a})\\
\Phi(\bullet_a \bullet_b) &= \varphi(\bullet_a)\varphi(\bullet_b) + \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a).
\end{aligned}$$

- En degré 3,

$$\begin{aligned}
\Phi({}^{b}\mathbf{V}^{c}_{a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a)\\
&\quad +\varphi(\bullet_b)\varphi(\mathbf{I}\substack{c\\a}) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}\substack{b\\a}) + \varphi({}^{b}\mathbf{V}^{c}_{a})\\
\Phi(\mathbf{I}\substack{c\\b\\a}) &= \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}\substack{b\\a}) + \varphi(\mathbf{I}\substack{c\\b})\varphi(\bullet_a)\\
&\quad +\varphi(\mathbf{I}\substack{c\\b\\a})
\end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\Phi\left(\begin{smallmatrix}c\bullet & & \\ b\bullet & & \bullet d\\ & \bullet a & \end{smallmatrix}\right) = \; & \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet d\\ \bullet a\end{smallmatrix}\right) \\
& + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet b\\ \bullet a\end{smallmatrix}\right) + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet b\\ \bullet a\end{smallmatrix}\right) \\
& + \varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet c\\ \bullet b\end{smallmatrix}\right)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_d)\varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet c\\ \bullet b\end{smallmatrix}\right)\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet c\\ \bullet b\end{smallmatrix}\right)\varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet d\\ \bullet a\end{smallmatrix}\right) + \varphi(\bullet_c)\varphi\left(\begin{smallmatrix}b\bullet & & \bullet d\\ & \bullet a & \end{smallmatrix}\right) + \varphi(\bullet_d)\varphi\left(\begin{smallmatrix}\bullet c\\ \bullet b\\ \bullet a\end{smallmatrix}\right) \\
& + \varphi\left(\begin{smallmatrix}c\bullet & & \\ b\bullet & & \bullet d\\ & \bullet a & \end{smallmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

Deux objets combinatoires apparaissent :

- Les partitions d'un arbre.
- Les ordres linéaires sur un arbre.

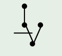
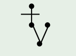
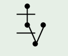
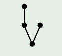
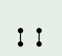
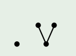
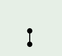
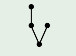
Définitions

Soit $F \in \mathbf{H}_{CK}$ une forêt non vide et $\boldsymbol{e}$ une contraction de F, c'est-à-dire un sous-ensemble de $E(F)$.

- La partition de F par $\boldsymbol{e}$ est la sous-forêt de F obtenue en conservant tous les sommets de F et les arêtes $\in \boldsymbol{e}$. On la note $Part_{\boldsymbol{e}}(F)$.
- Le contracté de F par $\boldsymbol{e}$ est la forêt obtenue en contractant dans F chaque arête $\in \boldsymbol{e}$ et en identifiant leurs extrémités. On le note $Cont_{\boldsymbol{e}}(F)$.

Exemples

Considérons $T =$ . Alors

contraction e								
$Part_e(T)$								
$Cont_e(T)$								

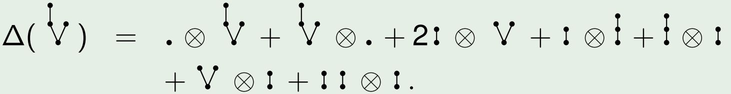
où, à la première ligne, les arêtes n'appartenant pas à e sont barrées.

Soit I_{CK} l'idéal de $\mathbf{H}_{CK}$ engendré par l'élément $\bullet - 1$. On note $\mathbf{C}_{CK}$ l'algèbre quotient $\mathbf{H}_{CK}/I_{CK}$: on identifie dans $\mathbf{C}_{CK}$ les éléments 1 et $\bullet\bullet$.

On définit sur $\mathbf{C}_{CK}$ le coproduit de contraction :

$$\Delta(F) = \sum_{\boldsymbol{e} \subseteq E(F)} Part_{\boldsymbol{e}}(F) \otimes Cont_{\boldsymbol{e}}(F)$$

Exemple



On retrouve le coproduit introduit par D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard et D. Manchon dans [CEFM].

Considérons la counité :

$$\varepsilon : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{C}_{CK} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ F \text{ forêt} & \mapsto & \delta_{F,\bullet}. \end{array} \right.$$

Théorème

$(\mathbf{C}_{CK}, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf commutative, non cocommutative, graduée par le nombre d'arêtes.

Proposition (Description de Φ)

Soit T un arbre non vide $\in \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$. Alors

$$\Phi(T) = \sum_{\mathbf{e} \subseteq E(T)} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{O}(Cont_{\mathbf{e}}(F))} \varphi(\sigma^{-1}(k)) \dots \varphi(\sigma^{-1}(1)) \right),$$

où k est le nombre de sommets de $Cont_{\mathbf{e}}(F)$ et où $\sigma^{-1}(i)$ est la composante connexe de $Part_{\mathbf{e}}(F)$ d'image par σ égale à i.

Remarque

Supposons que $\varphi(\bullet_a) = a$ et que $\varphi(T) = 0$ lorsque T est de degré au moins deux.
Alors on retrouve le morphisme d'algèbres surjectif $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Sh}^{\mathcal{D}}$ définit dans l'introduction.

Soit $\varphi : K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \to K(\mathcal{D})$. On suppose que $\mathcal{D}$ est muni d'un produit associatif et commutatif $[\cdot,\cdot] : (a,b) \in \mathcal{D}^2 \mapsto [a,b] \in \mathcal{D}$.

Théorème

Il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\Phi : \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \to \mathbf{Csh}^{\mathcal{D}}$ tel que le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} K\left(\mathbb{T}_{CK}^{\mathcal{D}}\right) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & K(\mathcal{D}) \\ \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}} \arrow[r, "\Phi"] & \mathbf{Csh}^{\mathcal{D}} \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

Exemples

- En degré 1, $\Phi(\bullet_a) = \varphi(\bullet_a)$.
- En degré 2,

$$\begin{aligned}
\Phi(\bullet_a \bullet_b) &= \varphi(\bullet_a)\varphi(\bullet_b) + \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + [\varphi(\bullet_a), \varphi(\bullet_b)] \\
\Phi(\mathbf{I}^{b}_{a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\mathbf{I}^{b}_{a}).
\end{aligned}$$

- En degré 3,

$$\begin{aligned}
\Phi({}^{b}\mathbf{V}^{c}_{a}) &= \varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
&\quad + [\varphi(\bullet_c), \varphi(\bullet_b)]\,\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_b)\varphi(\mathbf{I}^{c}_{a}) \\
&\quad + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}^{b}_{a}) + \varphi({}^{b}\mathbf{V}^{c}_{a}) \\
\Phi(\mathbf{I}^{\substack{c\\ b}}_{a}) &= \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\mathbf{I}^{b}_{a}) + \varphi(\mathbf{I}^{c}_{b})\varphi(\bullet_a) \\
&\quad + \varphi(\mathbf{I}^{\substack{c\\ b}}_{a})
\end{aligned}$$

Exemples

$$
\begin{aligned}
\Phi\big(\substack{c\\ \vert\\ b}\!\vee^{d}_{a}\big) = {} & \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\left[\varphi(\bullet_b), \varphi(\bullet_d)\right]\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \left[\varphi(\bullet_c), \varphi(\bullet_d)\right]\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi(\bullet_a) + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_b)\varphi\big(\substack{d\\ \vert\\ a}\big) \\
& + \varphi(\bullet_c)\varphi(\bullet_d)\varphi\big(\substack{b\\ \vert\\ a}\big) + \varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_c)\varphi\big(\substack{b\\ \vert\\ a}\big) \\
& + \varphi\big(\substack{c\\ \vert\\ b}\big)\varphi(\bullet_d)\varphi(\bullet_a) + \left[\varphi\big(\substack{c\\ \vert\\ b}\big), \varphi(\bullet_d)\right]\varphi(\bullet_a) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi\big(\substack{c\\ \vert\\ b}\big)\varphi(\bullet_a) + \varphi\big(\substack{c\\ \vert\\ b}\big)\varphi\big(\substack{d\\ \vert\\ a}\big) + \varphi(\bullet_c)\varphi\big({}^{b}\!\vee^{d}_{a}\big) \\
& + \varphi(\bullet_d)\varphi\big(\substack{c\\ \vert\\ b\\ \vert\\ a}\big) + \varphi\big(\substack{c\\ \vert\\ b}\!\vee^{d}_{a}\big).
\end{aligned}
$$

La notion de partitions d'un arbre apparaît encore. Par contre, ce n'est plus des odres linéaires qui apparaissent, mais des préordres linéaires.

Définition

Un préordre linéaire sur une forêt $F \in \mathbf{H}_{CK}$ à n sommets est une application surjective $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, k\}$, $1 \leq k \leq n$, telle que si, $a, b \in V(F)$, $a \neq b$,

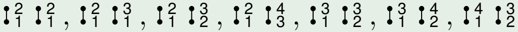
$$(a \twoheadrightarrow b \text{ dans } F) \Longrightarrow (\sigma(a) > \sigma(b)).$$

On note $\mathcal{O}_p(F)$ l'ensemble des préordres linéaires sur F.

Exemples

- Si $F =$ , les préordres linéaires possibles sur F sont :

- Si $F =$ , les préordres linéaires possibles sur F sont :



Proposition (Description de Φ)

Soit T un arbre non vide $\in \mathbf{H}_{CK}^{\mathcal{D}}$. Alors

$$\Phi(T) = \sum_{\boldsymbol{e} \subseteq E(T)} \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{O}_p(Cont_{\boldsymbol{e}}(T)) \\ Im(\sigma) = \{1, \ldots, q\}}} \varphi(\sigma^{-1}(q)) \ldots \varphi(\sigma^{-1}(1)) \right).$$

où, pour tout $i \in \{1, \ldots, q\}$,

- $\sigma^{-1}(i)$ est la forêt $T_1 \ldots T_n$ de toutes les composantes connexes T_k de $Part_{\boldsymbol{e}}(F)$ telles que $\sigma(T_k) = i$.
- $\varphi(\sigma^{-1}(i)) = [\varphi(T_1), \ldots, \varphi(T_n)]^{(n)}$.

Rappelons qu'un préordre sur un ensemble est une relation binaire, réflexive et transitive.

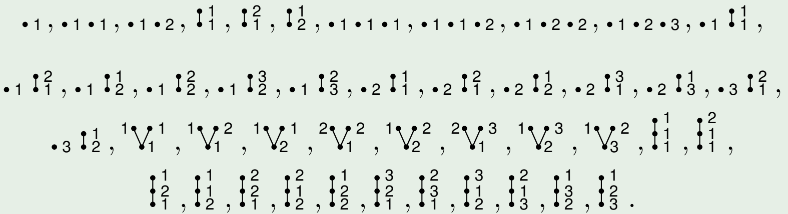
Définition

Une forêt préordonnée est une forêt enracinée $F \in \mathbf{H}_{CK}$ telle qu'on ait de façon équivalente :

- Un préordre total sur l'ensemble $V(F)$.
- Une surjection $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, k\}$, avec k un entier inférieur au nombre de sommets de F.

Exemples

En degré ≤ 3,

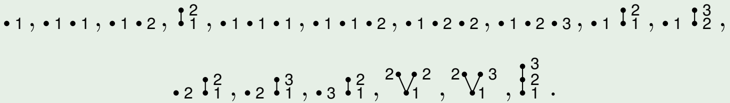


Définition

Une forêt préordonnée en tas est une forêt préordonnée (F, σ) où $\sigma : V(F) \to \{1, \ldots, k\}$ est un préordre linéaire.

Exemples

En degré ≤ 3,

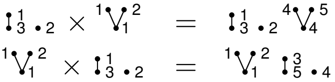


Voici quelques valeurs numériques du nombre f_n^{po} de forêts préordonnées et f_n^{hpo} de forêts préordonnées en tas :

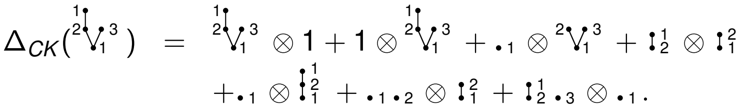
n	0	1	2	3	4	5
f_n^{po}	1	1	5	38	424	6284
f_n^{hpo}	1	1	3	12	64	428

L'espace vectoriel $\mathbf{H}_{po}$ engendré par les forêts préordonnées est une algèbre de Hopf :

- Le produit de F par G est obtenu en concaténant F et G et en décalant les indices des sommets de G :



- Le coproduit de F est le coproduit de coupe avec le préordre induit par celui de F sur les branches et le tronc :



L'espace vectoriel $\mathbf{H}_{hpo}$ engendré par les forêts préordonnées en tas est une sous-algèbre de Hopf de $\mathbf{H}_{po}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Surj_n$ l'ensemble des applications $\tau : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}^*$, telles que $\tau(\{1, \ldots, n\}) = \{1, \ldots, k\}$ pour un certain k. On représente $\tau \in Surj_n$ par le mot tassé $(\tau(1) \ldots \tau(n))$.

On note $\mathbf{WQSym}^*$ l'espace vectoriel dont une base est donnée par l'union disjointe des ensembles $Surj_n$. $\mathbf{WQSym}^*$ est une algèbre de Hopf (introduite dans [NT]) :

- Le produit de τ et ω est donné en décalant les lettres de ω et en réalisant le battage de ces lettres avec celles de τ :

$$\begin{aligned}(112)(21) &= (11243) + (11423) + (14123) + (41123) \\ &\quad +(11432) + (14132) + (41132) + (14312) \\ &\quad +(41312) + (43112)\end{aligned}$$

- Le coproduit de τ est obtenu en réalisant toutes les coupes du mot représentant τ en deux mots et en tassant ceux-ci :

$$\begin{aligned}
& \Delta_{\mathbf{WQSym}^*}((21132)) \\
= \;& 1 \otimes (21132) + pk((2)) \otimes pk((1132)) \\
& + pk((21)) \otimes pk((132)) + pk((211)) \otimes pk((32)) \\
& + pk((2113)) \otimes pk((2)) + (21132) \otimes 1 \\
= \;& 1 \otimes (21132) + (1) \otimes (1132) + (21) \otimes (132) \\
& + (211) \otimes (21) + (2113) \otimes (1) + (21132) \otimes 1.
\end{aligned}$$

Définition

Soit (F,σ) une forêt préordonnée de degré n et $\tau \in Surj_n$. Alors on note $\mathbb{S}^{\tau}_{(F,\sigma)}$ l'ensemble des bijections $\varphi : V(F) \to \{1,\ldots,n\}$ telles que :

1. si $v \in V(F)$, alors $\sigma(v) = \tau(\varphi(v))$,
2. si $v, v' \in V(F)$, $v' \twoheadrightarrow v$, alors $\varphi(v) \geq \varphi(v')$.

Exemples

Soit $F = {}^{2}\mathbb{V}_{1}^{2}$ et $\tau = (221)$. En notant les sommets de F par ${}^{b}\mathbb{V}_{a}^{c}$, on a deux éléments $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{S}^{\tau}_{(F,\sigma)}$:

$$\varphi_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} a & \to & 3 \\ b & \to & 2 \\ c & \to & 1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} a & \to & 3 \\ b & \to & 1 \\ c & \to & 2 \end{array} \right.$$

Théorème

Considérons

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbf{H}_{po} & \rightarrow & \mathbf{WQSym}^* \\ (F, \sigma) \text{ forêt de degré } n & \mapsto & \displaystyle\sum_{\tau \in Surj_n} \mathrm{card}(\mathbb{S}^{\tau}_{(F,\sigma)})\, \tau. \end{array} \right.$$

Alors :

- $\Phi : \mathbf{H}_{po} \rightarrow \mathbf{WQSym}^*$ est un morphisme d'algèbres de Hopf homogène de degré 0.
- La restriction de Φ à $\mathbf{H}_{hpo}$ est une injection d'algèbres de Hopf.

Exemples

- En degré 1 : $\Phi(\bullet_1) = (1)$.
- En degré 2 :

$$\Phi(\bullet_1 \bullet_1) = 2(11), \qquad \Phi(\bullet_1 \bullet_2) = (12) + (21), \qquad \Phi(\mathrm{I}^{a}_{b}) = (ab).$$

- En degré 3 :

$$\begin{array}{rclrcl}
\Phi(\bullet_1 \bullet_1 \bullet_1) & = & 6(111) & \Phi({}^{2}\mathrm{V}^{1}_{2}) & = & (122) + (212) \\
\Phi(\mathrm{I}^{\substack{2\\3}}_{1}) & = & (231) & \Phi({}^{2}\mathrm{V}^{2}_{1}) & = & 2(221)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(\mathrm{I}^{2}_{1} \bullet_2) & = & (212) + 2(221) \\
\Phi(\bullet_2 \mathrm{I}^{1}_{3}) & = & (213) + (123) + (132) \\
\Phi(\bullet_1 \mathrm{I}^{2}_{3}) & = & (123) + (213) + (231) \\
\Phi(\bullet_1 \bullet_1 \bullet_2) & = & 2\left[(112) + (121) + (211)\right]
\end{array}$$

- D. Calaque, K. Ebrahimi-Fard, and D. Manchon, *Two interacting Hopf algebras of trees*, Advances in Appl. Math. **47** (2011), 282-308, arXiv :0806.2238.
- A. Connes and D. Kreimer, *Hopf algebras, Renormalization and Noncommutative geometry*, Comm. Math. Phys **199** (1998), no. 1, 203-242, arXiv :hep-th/98 08042.
- J. Ecalle and B. Vallet, *The arborification-coarborification transform : analytic, combinatorial, and algebraic aspects*, Ann. Fac. Sc. Toulouse **13** (2004), 4, 575-657.
- M.E. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, Journal of Algebraic Combinatorics **11** (2000), 49-68, arXiv :math/9907173.
- L. Foissy and J. Unterberger, *Ordered forests, permutations and iterated integrals* (2010), arXiv :1004.5208.
- J.-C. Novelli and J.-Y. Thibon, *Polynomial realizations of some trialgebras*, arXiv :math/0605061.