

Applications

1 Applications entre ensembles	2
1.1 Définitions et exemples	2
1.2 Composition d'applications	4
1.3 Image directe, image réciproque	4
1.4 Restriction, prolongements	5
2 Injections, surjections, bijections	7
2.1 Applications injectives	7
2.2 Applications surjectives	8
2.3 Bijections	9

Compétences attendues.

- ✓ Déterminer et manipuler les images directes et réciproques d'ensembles par une application.
- ✓ Montrer qu'une application est injective, surjective ou bijective.
- ✓ Déterminer, si elle existe, la bijection réciproque d'une application.

1 Applications entre ensembles

1.1 Définitions et exemples

Définition.

Soient E et F deux ensembles.

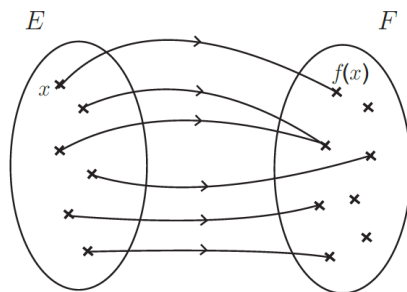
On dit que f est une *application de E dans F* lorsqu'à tout élément x de E , f associe un unique élément de F noté $f(x)$. E est l'*ensemble de départ* de f et F est l'*ensemble d'arrivée* de f . On note :

$$f : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases} .$$

On appelle *graphe* de l'application f le sous-ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ de $E \times F$.

Remarque. Pour une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le graphe de f est exactement ce dont on a l'habitude : l'ensemble des couples (x, y) où $y = f(x)$. Et la condition sur l'existence et l'unicité de $f(x)$ signifie que toute droite verticale rencontre le graphe en un unique point.

Représentation sagittale.



Pour aller plus loin.

Le point de vue choisi pour cette définition est volontairement intuitif (et c'est celui qu'on gardera à l'esprit) : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F .

Donnons pour information une définition rigoureuse d'une application, en traduisant de façon ensembliste cette action d'associer un élément à un autre en partant du graphe de l'application :

Une application f est un triplet d'ensembles (E, F, Γ) tel que :

- Γ est un sous-ensemble de $E \times F$;
- pour tout $x \in E$, il existe un et un seul élément $y \in F$ tel que $(x, y) \in \Gamma$. Cet élément y est noté $f(x)$.

Remarque. Par définition, deux applications f et g sont égales si, et seulement si :

- elles ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée F ;
- pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.



Notation.

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E .

Exemples.

- $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases} .$
- $g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & A \cup X \end{cases} \text{ où } A \text{ est une partie d'un ensemble } E.$

- $h : \begin{cases} \mathbb{Q} & \rightarrow \mathbb{Z} \\ \frac{p}{q} & \mapsto p \end{cases}$ n'est pas bien définie, car par exemple le rationnel 2 s'écrit à la fois $\frac{2}{1}$ et $\frac{4}{2}$, donc son image n'est pas uniquement définie. En revanche, l'application qui à un rationnel associe le numérateur de son écriture irréductible¹ est bien définie.
- La fonction indicatrice d'une partie A d'un ensemble E est l'application $\mathbb{1}_A : \begin{cases} E & \rightarrow \{0, 1\} \\ x & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$.

Définition.

Soit E un ensemble. On appelle *identité de E* l'application $\text{id}_E : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x & \mapsto x \end{cases}$.

Définition.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Soient $x \in E$ et $y \in F$. Si $y = f(x)$, on dit que y est **l'image de x par f** , et que x est **un antécédent de y par f** .

On appelle *image de f* l'ensemble :

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Notons que c'est une partie de F , et qu'elle est formée des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent par f .



Danger.

L'image d'un élément de l'ensemble de départ est toujours unique, par définition d'une application. En revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut ne pas posséder d'antécédents, ou en posséder plusieurs. On prendra donc bien garde à dire **un** antécédent de y , et surtout pas l'antécédent de y par f .

Exemple. Considérons l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$. Alors 0 possède un unique antécédent par f qui est 0, 1 possède deux antécédents par f qui sont 1 et -1 , et -1 ne possède aucun antécédent par f . En outre, l'image de f est $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Exercice 1. Soit A une partie d'un ensemble non vide E . Considérons l'application $g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto A \cup X \end{cases}$. Déterminer l'image de g , ainsi que l'ensemble des antécédents par g de $\emptyset$, A et E .

Définition.

Soient I et E deux ensembles. On appelle *famille (d'éléments) de E indexée par I* toute application de I dans E .



Notation.

Les familles, au lieu d'être notées comme des applications, sont presque toujours notées sous la forme $(x_i)_{i \in I}$. L'ensemble des familles de E indexée par I est naturellement noté E^I .

Remarques.

- Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E n'est rien de plus que l'application f de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans E définie par les relations $f(1) = x_1, \dots, f(n) = x_n$, et qui associe à chaque position l'élément qui lui correspond.
- Une suite, qui est une famille indexée par $\mathbb{N}$, n'est rien d'autre qu'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$ pour les suites complexes). L'ensemble des suites réelles est donc noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

¹Rappelons que pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $r = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.



Pour aller plus loin.

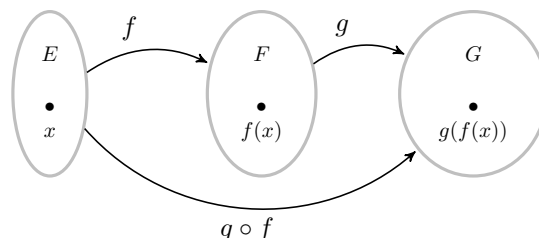
Une famille d'éléments de E indexée par l'ensemble vide est une application de $\emptyset$ dans E . Et ça existe bien : par définition d'une application, l'ensemble vide est une application de $\emptyset$ dans E , et c'est la seule. On l'appelle la *famille vide* de E .

1.2 Composition d'applications

Définition.

Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G . On appelle *application composée* l'application de E dans G notée $g \circ f$ et définie par :

$$\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x)).$$



Danger.

Le sens dans lequel on effectue la composition est important : même dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont toutes les deux bien définies (c'est-à-dire lorsque $G = E$), en règle générale ces deux applications ne sont pas égales.

Par exemple, si $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + 2\pi \end{cases}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(\sin(x)) = \sin(x) + 2\pi \neq \sin(x + 2\pi) = \sin(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Dans le cas particulier où l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de f sont égaux, alors on peut composer f avec elle-même. Puis composer cette composée avec f , etc.

Définition.

Soit E un ensemble, et soit $f : E \rightarrow E$ une application.

On pose $f^0 = \text{id}_E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Propriété 1 (Propriétés de la composition)

Soient E, F, G, H des ensembles.

(1) Pour tout $f \in \mathcal{F}(E, F)$: $f \circ \text{id}_E = \text{id}_F \circ f = f$.

(2) Pour tous $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $g \in \mathcal{F}(F, G)$, $h \in \mathcal{F}(G, H)$: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

1.3 Image directe, image réciproque

Définition.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit $A \subset E$. On appelle *image directe* de A par f , et on note $f(A)$, la partie de F définie par :

$$f(A) = \{f(x), x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

Remarque. L'image directe de A est donc l'ensemble des éléments de F qui possèdent au moins un antécédent dans A . C'est également l'ensemble des images de tous les éléments de A . Notons que par définition, $\text{Im}(f) = f(E)$.

Rédaction.

Quand on souhaite considérer un élément dans $f(A)$, la rédaction n'est surtout pas « soit $f(x) \in f(A)$ », mais :

Soit $y \in f(A)$. Alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$.

Exemples.

- $\sin([0, \pi]) = [0, 1]$, $\arctan([0, +\infty[) = [0, \frac{\pi}{2}[$.
- On a toujours $f(\emptyset) = \emptyset$, et si $A \neq \emptyset$, alors $f(A) \neq \emptyset$.

Définition.

Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque de B par f* , et on note $f^{\leftarrow}(B)$, la partie de E définie par :

$$f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

Autrement dit, $f^{\leftarrow}(B)$ est la partie de E formée de tous les antécédents des éléments de B par f , et pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{\leftarrow}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

Notation.

La notation $f^{\leftarrow}(B)$ est provisoire. Elle a l'avantage de ne souffrir d'aucune ambiguïté. Ce n'est cependant pas la notation couramment utilisée que nous introduirons un peu plus tard.

Exemples.

- $\sin^{\leftarrow}(\{-1\}) = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = -1\} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, $\arctan^{\leftarrow}([0, 1]) = [0, \frac{\pi}{4}]$.
- Si $f \in \mathcal{F}(E, F)$, et si $y \in F$, alors $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y par f , c'est-à-dire l'ensemble des éléments $x \in E$ solutions de l'équation $y = f(x)$.
- Soit $A \subset E$, et considérons $\mathbb{1}_A : E \rightarrow \{0, 1\}$ la fonction indicatrice de l'ensemble A , définie pour tout $x \in E$ par :

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Alors $\mathbb{1}_A^{\leftarrow}(\{1\}) = A$ et $\mathbb{1}_A^{\leftarrow}(\{0\}) = \overline{A}$. En particulier la fonction indicatrice d'un ensemble permet de le caractériser : la donnée de $\mathbb{1}_A$ détermine l'ensemble A de manière unique, et réciproquement.

- On peut avoir $f^{\leftarrow}(B) = \emptyset$ sans que B soit vide. Par exemple, $\sin^{\leftarrow}([3, 4]) = \emptyset$ puisque les éléments de $[3, 4]$ n'ont aucun antécédent par la fonction $\sin$.

1.4 Restriction, prolongements

Les notions de restriction et prolongements ont déjà été rencontrés pour les fonctions numériques, elles sont encore valable pour n'importe quelle application.

Définition.

- Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $A \subset E$. On appelle *restriction de f à A* l'application $f|_A : \begin{cases} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$.
- Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit E' un ensemble tel que $E \subset E'$. On appelle *prolongement de f à E'* toute application $g : E' \rightarrow F$ telle que $g|_E = f$, c'est-à-dire telle que $g(x) = f(x)$ pour tout x dans E .

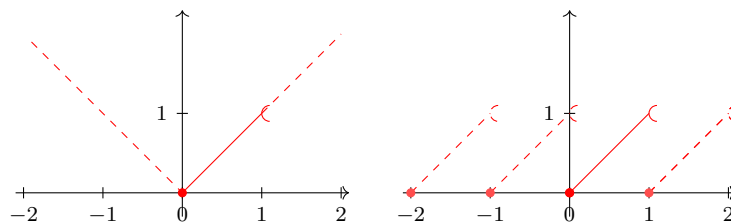


Mise en garde.

On prendra garde au fait qu'un prolongement de f n'est pas nécessairement unique.

Par exemple, si f est la fonction définie sur $[0, 1[$ par $f(x) = x$, alors $g : x \mapsto |x|$ et $h : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ sont des prolongements de f à $\mathbb{R}$.

On parle donc toujours d'**un** prolongement, et non **du** prolongement.



Deux prolongements de $f : x \in [0, 1[\mapsto x$.

Définition.

Soient $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et $B \subset F$. On dit que f est à valeurs dans B si $\text{Im}(f) \subset B$, soit encore si :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \in B.$$

Exemples. $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 + 1} \end{cases}$ est à valeurs dans $[1, +\infty[$, $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \\ \theta & \mapsto e^{i\theta} \end{cases}$ est à valeurs dans $\mathbb{U}$.

Définition.

Soit $f : E \rightarrow F$ et soit B une partie de F telle que f soit à valeurs dans B .

La *corestriction* de f à B est l'application $f|_B : \begin{cases} E & \rightarrow \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}$.

Remarque. La plupart du temps, et en particulier pour les fonctions numériques, on confond (abusivement) f et $f|_B$. Elles ont même ensemble de départ, prennent en tout point la même valeur, mais diffèrent juste en ceci que leurs ensembles d'arrivées sont différents.

Définition.

Soient $f \in \mathcal{F}(E, E)$ et $A \subset E$. On dit que A est stable par f si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \quad f(x) \in A.$$

Exemple. L'intervalle $[0, 1]$ est stable par $\sin$ car $\sin([0, 1]) \subset [0, 1]$.

Définition.

Soient $f \in \mathcal{F}(E, E)$ et A une partie de E stable par f . On appelle *application induite par f sur A* l'application :

$$f|_A : \begin{cases} A & \rightarrow \\ x & \mapsto f(x) \end{cases}.$$



Mise en garde.

On distinguera bien la restriction $f|_A : A \rightarrow E$ de f à A , qui peut être considérée pour toute partie A de E et qui n'a pas de raison d'être à valeurs dans A , et l'application induite $f|_A^A : A \rightarrow A$ de f sur A , qui n'a de sens que si A est stable par f .

2 Injections, surjections, bijections

Si une application f associe à tout élément de E une et une seule image, on s'interroge maintenant sur le nombre éventuel d'antécédents d'un élément y de F .

2.1 Applications injectives

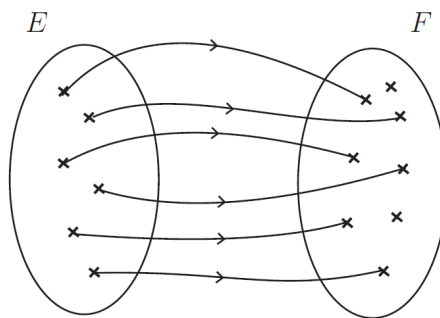
Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . On dit que f est *injective*, ou encore que f est une *injection*, si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f .

Autrement dit, f est injective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au plus une solution $x \in E$.

Exemples.

- Pour tout ensemble E , l'application id_E est injective, puisque tout élément de E admet au plus un antécédent par id_E (il en admet même exactement un, lui-même).
- L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ est non injective : en effet, on a par exemple $f(2) = f(-2) = 4$, et 4 admet deux antécédents par f . Par contre, l'application $f|_{\mathbb{R}_+} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ est injective.
- L'application représentée ci-dessous est injective :



Théorème 2 (Caractérisation d'une injection)

Une application $f : E \rightarrow F$ est injective si, et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Remarques.

- Par contraposition, f est injective lorsqu'elle donne des valeurs différentes à des points différents :

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Si $f : E \rightarrow F$ est injective, et si $x_1, x_2 \in E$, on a en fait l'équivalence :

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

puisque réciproquement, deux éléments de E qui sont égaux ont toujours même image. Ce résultat est particulièrement utile lorsqu'on résout une équation par équivalences.



Méthode. Comment montrer qu'une application est injective ?

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est injective, on se donne deux éléments quelconques x_1 et x_2 de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles injectives ?

$$\bullet f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{z-i} \end{cases} ; \quad \bullet g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{cases} ; \quad \bullet h : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{cases} .$$

Propriété 3 (Injectivité et stricte monotonie)

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application. Si f est strictement monotone, alors elle est injective.

Propriété 4 (Composition et injectivité)

On considère deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

- (1) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- (2) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

2.2 Applications surjectives

Définition.

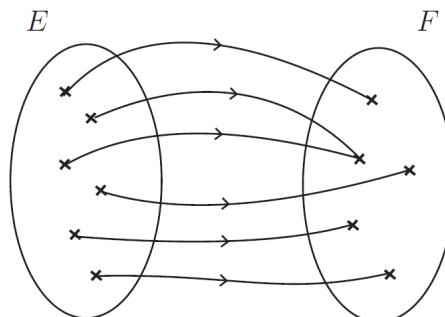
Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . On dit que f est *surjective*, ou que f est une *surjection*, si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x).$$

Autrement dit, f est surjective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède au moins une solution $x \in E$.

Exemples.

- Pour tout ensemble E , l'application id_E est injective, puisque tout élément de E admet au moins un antécédent par id_E (il en admet même exactement un, lui-même).
- L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ n'est pas surjective, -1 n'ayant par exemple pas d'antécédent par f . Par contre, l'application $f|_{\mathbb{R}_+} : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ est surjective.
- L'application représentée ci-dessous est surjective :



Propriété 5 (Caractérisation des surjections)

Une application $f : E \rightarrow F$ est surjective si, et seulement si, $\text{Im}(f) = F$.



Méthode. Comment montrer qu'une application est surjective ?

Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est surjective, on se donne un élément quelconque de F et on montre qu'il a au moins un antécédent dans E .

Exercice 3. Les applications suivantes sont-elles surjectives ?

$$\bullet f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{i\} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{z-i} \end{cases} ; \quad \bullet g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{cases} ; \quad \bullet h : \begin{cases} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, xy) \end{cases} .$$

Propriété 6 (Surjectivité et composition)

On considère deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

(1) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

(2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

2.3 Bijections

Définition.

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . On dit que f est *bijjective* de E dans F , ou que f réalise une *bijection* de E sur F , si tout élément de F admet **un unique** antécédent par f :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x).$$

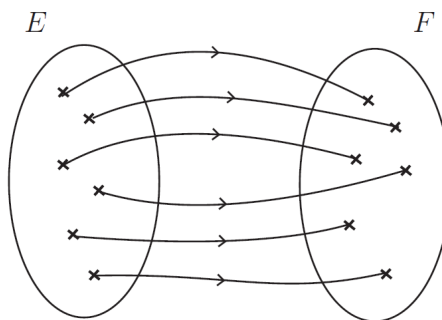
Autrement dit, f est bijective si pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution $x \in E$.

Exemples.

- L'application identité id_E d'un ensemble E est bijective : tout élément x de E est son unique antécédent.
- L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$ n'est pas bijective. Elle induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Notons bien que le changement des ensembles de départ et d'arrivée d'une application modifie ses propriétés (injectivité, surjectivité, bijectivité).

- Les applications $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (a, b) & \mapsto & a + ib \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi] & \rightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r, \theta) & \mapsto & re^{i\theta} \end{cases}$ sont bijectives.
- L'application représentée ci-dessous est bijective :



Exercice 4. Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{cases}$ est bijective.

Propriété 7 (Première caractérisation d'une application bijective)

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F . Alors :

$$f \text{ est bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective et surjective.}$$

Exemple. L'application $g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{cases}$ est injective et surjective. Elle réalise donc une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur lui-même.

Définition.

Soit $f : E \rightarrow F$ est une *application bijective*.

On appelle *bijection réciproque* de f , et on note f^{-1} , l'application de F dans E définie par :

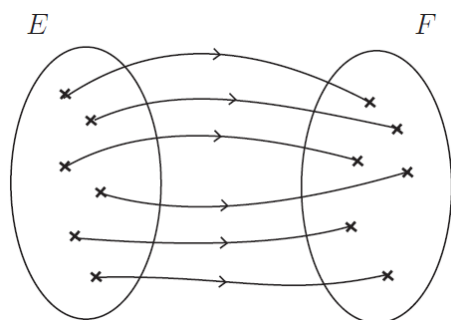
$$f^{-1} : \begin{cases} F & \rightarrow & E \\ y & \mapsto & f^{-1}(y) \text{ l'unique antécédant de } y \text{ par } f. \end{cases}$$

Autrement dit :

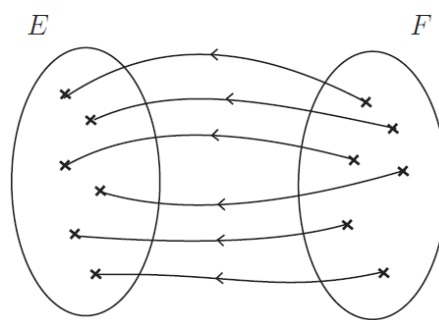
$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Exemples.

- La bijection réciproque de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y, x - y) \end{cases}$ est $f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v) & \mapsto & (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}) \end{cases}$.
- On représente ci-dessous une application bijective f et sa bijection réciproque f^{-1} :



Représentation de f .



Représentation de f^{-1} .

Remarque. Il résulte de la définition que pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$x = f^{-1} \circ f(x) \quad \text{et} \quad y = f \circ f^{-1}(y).$$

Théorème 8 (Seconde caractérisation d'une application bijective)

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

f est une bijection de E sur F si, et seulement si, il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que :

$$g \circ f = \text{id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{id}_F.$$

Une telle application g , lorsqu'elle existe, est alors unique : c'est la bijection réciproque de f .

Exemples.

1. L'application $g : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & \overline{A} \end{cases}$ satisfait $g \circ g = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$. Par conséquent, on retrouve que g est bijective, et de plus $g^{-1} = g$.
2. Plus généralement, si $f : E \rightarrow E$ est une *involution* de E , c'est-à-dire une application satisfaisant $f \circ f = \text{id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

Propriété 9

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications.

- (1) Si f est une bijection de E sur F , alors f^{-1} est bijective de F sur E et :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

- (2) Si f est une bijection de E sur F et si g est une bijection de F sur G , alors $g \circ f$ est une bijection de E sur G et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**Mise en garde.**

On prendra bien garde au fait que l'ordre change lorsqu'on passe à la bijection réciproque : la bijection réciproque de $g \circ f$ n'est pas $g^{-1} \circ f^{-1}$!

Une analogie simple mais efficace : le matin vous commencez par mettre vos chaussettes (c'est f), puis vous enflez vos chaussures (c'est g). Le soir, pour vous déshabiller (c'est donc $(g \circ f)^{-1}$), vous commencez par enlever vos chaussures (donc g^{-1}), puis vous enlevez vos chaussettes (c'est f^{-1}). Et sûrement pas le contraire !

**Méthode. Comment montrer qu'une application est bijective ?**

Le tableau suivant résume la marche à suivre pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est bijective.

Priorité	Ce qu'on fait	Ce qu'on obtient
1	Si on connaît spontanément une expression explicite de f^{-1} , on appelle g la fonction en question et on vérifie que : $g \circ f = \text{id}_E$ et $f \circ g = \text{id}_F$.	Bijektivité + Réciproque
2	Si on ne connaît pas spontanément f^{-1} , on peut essayer d'en trouver une expression explicite via l'équivalence : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$.	Bijektivité + Réciproque
3	Si on ne se sent pas capable de trouver une expression explicite de f^{-1} , on montre en deux temps que f est à la fois injective et surjective.	Bijektivité

Revenons enfin sur la notion d'image réciproque d'un ensemble par une application $f : E \rightarrow F$ dans le cas particulier où f est bijective.

Propriété 10

Soit $f : E \rightarrow F$ une application bijective. Pour toute partie B de F :

$$f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$$

où l'on rappelle que $f^{\leftarrow}(B)$ est l'image **réciroque** de B par f , et $f^{-1}(B)$ l'image **directe** de B par f^{-1} .

**Notation.**

Du fait de ce résultat, nous adopterons désormais la notation usuelle $f^{-1}(B)$ pour l'image réciproque de B par f et plus jamais $f^{\leftarrow}(B)$, que f **soit bijective ou non** !

**Danger.**

La notation définitive $f^{-1}(B)$ de l'image réciproque de l'ensemble B par f peut être source de confusions : l'application f n'est en général pas bijective, et il n'y a pas nécessairement d'application nommée f^{-1} derrière cette notation.

Pour ne pas se tromper :

- la notation $f^{-1}(B)$ a un sens tout le temps, que f soit **bijective ou non**, et prend en argument un **sous-ensemble** B de F ;
- les notations $f^{-1}(y)$ ou f^{-1} , n'ont de sens **que** lorsque f est **bijective**. Elles désignent alors la bijection réciproque de f , qui prend en argument un **élément** y de F .