Chapitre 16

Limites et continuité

Compétences attendues.

- ✓ Savoir manipuler les définitions de limites, de limites à gauche et à droite, de continuité.
- ✓ Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite ou de la continuité.
- ✓ Établir l'existence de la limite d'une fonction et sa valeur éventuelle à l'aide d'un encadrement ou de sa monotonie.
- ✓ Savoir appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de la bijection.
- ✓ Savoir appliquer le théorème des bornes atteintes.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)

Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`

E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Limites de fonctions

Dans tout le chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. On notera :

- $\overset{\circ}{I} = I \setminus \{\text{bornes de } I\}$ appelé l'*intérieur de l'intervalle* I ;
- $\bar{I} = I \cup \{\text{bornes de } I\}$ appelé l'*adhérence de l'intervalle* I.

Par exemple, $\overset{\circ}{\overbrace{[0,2[}} =]0,2[$ et $\overline{[0,2[} = [0,2]$, $\overset{\circ}{\overbrace{]1,+\infty[}} =]1,+\infty[$ et $\overline{]1,+\infty[} = [1,+\infty[\cup\{+\infty\}$, $\overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ et $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1.1 Définitions

Limite d'une fonction en un point.

Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et a **un réel** appartenant à $\bar{I}$. On dit que :

- *f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en a*, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- *f admet pour limite $+\infty$ en a*, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, si :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \implies f(x) \geq M.$$
- *f admet pour limite $-\infty$ en a*, notée $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, si :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq M.$$

Remarque. Dans le cas où $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, la définition signifie que la distance de $f(x)$ à ℓ peut être rendue inférieure à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné, à condition que la distance de x à a soit assez petite.

Limite d'une fonction en $+\infty$.

Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $+\infty$ est une borne de I. On dit que :

- *f admet une limite (finie) $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$*, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, si :
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$
- *f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$*, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \implies f(x) \geq M.$$
- *f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$*, notée $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, si :
$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \geq A \implies f(x) \leq M.$$

Remarque. Dans le cas où $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, la définition signifie que la distance de $f(x)$ à ℓ peut être rendue inférieure à tout nombre $\varepsilon > 0$ donné, à condition que x soit assez grand.

Limite d'une fonction en $-\infty$.

Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que $-\infty$ est une borne de I. On dit que :

- f *admet une limite (finie)* $\ell \in \mathbb{R}$ *en* $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq B \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

- f *admet pour limite* $+\infty$ *en* $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq B \implies f(x) \geq M.$$

- f *admet pour limite* $-\infty$ *en* $-\infty$, notée $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall N \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad x \leq B \implies f(x) \leq N.$$

Remarques.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \bar{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \quad \text{si, et seulement si,} \quad |f(x) - \ell| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

  En particulier, $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ si, et seulement si, $|f(x)| \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

- Comme pour le cas des limites de suites, les inégalités larges peuvent être remplacées par des inégalités strictes dans les définitions.

- Dans le cas des limites finies, l'inégalité est d'autant plus contraignante que ε est petit. On peut donc se contenter d'étudier le cas où ε est inférieure à une valeur ε_0 donnée, par exemple « $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ » ou « $\forall \varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ ».

  De même, dans le cas des limites égales à $+\infty$, on peut remplacer « $\forall M \in \mathbb{R}$ » par « $\forall M > 0$ » par exemple, et dans le cas des limites égales à $-\infty$, « $\forall M \in \mathbb{R}$ » par « $\forall M < 0$ ».

Formulation unique en termes de voisinages

Définition.

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage de* a tout ensemble de réels de la forme :

- $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ si a est un réel ;
- $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ si $a = +\infty$;
- $]-\infty, B]$ avec $B \in \mathbb{R}$ si $a = -\infty$.

On note $\mathscr{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.

Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{I}$.
On dit que f *vérifie la propriété* $\mathscr{P}$ *au voisinage de* a s'il existe un voisinage V de a tel que f vérifie $\mathscr{P}$ sur $I \cap V$.

Exemples.

- La fonction $x \mapsto x^2 - x$ est positive au voisinage de $+\infty$. En effet, $V = [1, +\infty[$ est un voisinage de $+\infty$ sur lequel $x^2 - x \geq 0$.

- La fonction ln est négative au voisinage de 0, par exemple car $\ln(x) \leq 0$ pour tout $x \in [-1, 1] \cap \mathbb{R}_+^*$.

- La fonction exp est bornée au voisinage de $-\infty$, par exemple car $0 \leq \exp(x) \leq 1$ sur $]-\infty, -1]$.

Propriété 1

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si, et seulement si, pour tout voisinage V de ℓ, f est à valeur dans V au voisinage de a. Soit encore :

$$\forall V \in \mathscr{V}_\ell, \exists U \in \mathscr{V}_a, \forall x \in I, \quad x \in U \implies f(x) \in V.$$

1.2 Premières propriétés

Propriété 2 (Unicité de la limite)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite finie en a, cette limite est unique. On la note $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{a} f$.

Danger.

On utilisera la notation $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **uniquement après avoir montré l'existence** d'une telle limite en a.

Propriété 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$, de sorte que f **est définie en** a.
Si f admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a, alors $\ell = f(a)$ (et en particulier, $\ell \in \mathbb{R}$).

Propriété 4

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.

Propriété 5

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 6

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.
Si f admet une limite $\ell > 0$ en a, alors f est minorée au voisinage de a par un réel strictement positif.

Remarque. En particulier, si f admet une limite non nulle en a, alors f est non nulle au voisinage de a : il suffit d'appliquer la proposition précédente à $|f|$.

1.3 Limites à droite et à gauche

Dans toute cette section, a est un réel appartenant à $\overset{\circ}{I}$ et f une fonction définie sur I ou $I \setminus \{a\}$.

Définition.

- On dit que f *admet une limite à gauche en* a si $f_{|I\cap]-\infty,a[}$ admet une limite en a.
  Cette limite est alors notée $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.
- On dit que f *admet une limite à droite en* a si $f_{|I\cap]a,+\infty[}$ admet une limite en a.
  Cette limite est alors notée $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$

Exemples. $\lim\limits_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

Propriété 7

- Si f est définie en a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \text{ si, et seulement si, } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell \text{ et } \ell = f(a).$$

- Si f n'est pas définie en a, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \text{ si, et seulement si, } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \ell.$$

Exemples.

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et que $f(0) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$. Alors $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$. Mais comme $g(0) = 1 \neq 0$, g n'admet pas de limite en 0.
- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Puisque $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 1$, h n'admet pas de limite en 0.

1.4 Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 8 (*Caractérisation séquentielle de la limite*)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Il y a équivalence entre :

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$;

(ii) pour toute suite (x_n) à valeurs dans I qui tend vers a, la suite $(f(x_n))$ tend vers ℓ.

Méthode. Comment montrer qu'une fonction n'admet pas de limite ?
Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a, on peut chercher deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tendent vers a et telles que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ont deux limites différentes.

Exercice 1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admet-elle une limite en 0 ?

1.5 Opérations sur les limites

Propriété 9

Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions admettant des limites finies ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$ quand x tend vers a. Alors :

- pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{x\to a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda\ell + \mu\ell'$.
- $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \ell\ell'$.
- Si $\ell' \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.

Remarque. Ces formules se généralisent aux cas des limites infinies en a, sauf en cas de *formes indéterminées* du type :

$$\infty - \infty, \quad 0 \times (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}.$$

Propriété 10

Soient $a \in \overline{I}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de a. Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x)$ existe et vaut 0.

Propriété 11 (Composition des limites)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Soient $a \in \overline{I}$, $b \in \overline{J}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$.

1.6 Limites et inégalités

Propriété 12 (Passage à la limite dans les inégalités larges)

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \overline{I}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \in \mathbb{R}$, et si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, alors $\ell \leq \ell'$.

Mise en garde.
Il n'y a pas de résultat analogue avec des inégalités strictes : les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite.

2 Théorèmes d'existence de limites

2.1 Théorème d'encadrement

Théorème 13 (*d'encadrement*)

Soient f, g et h trois fonctions définies sur I, $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Supposons que :

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a ;
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$.

Alors $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existe et vaut ℓ.

Propriété 14

Soient $a \in \overline{I}$, f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a.

- Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

2.2 Cas des fonctions monotones

Théorème 15 (*de la limite monotone*)

Soient $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction croissante[a].

- Si f est majorée, alors f admet une limite finie en b et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.

  Sinon $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.
- Si f est minorée, alors f admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{x \in]a,b[} f(x)$.

  Sinon $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

[a] On dispose d'un énoncé analogue dans le cas où f est décroissante.

Exercice 2. Montrer que la fonction $x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en $+\infty$.

Propriété 16

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone et $a \in \overset{\circ}{I}$. Alors, f admet des limites finies à gauche et à droite en a. De plus :

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ si f est croissante ;
- $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) \leq f(a) \leq \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ si f est décroissante.

3 Continuité

3.1 Continuité en un point

Définition de la continuité en un point

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que f est *continue en* a si f admet une limite finie en a, nécessairement égale à $f(a)$.
Autrement dit, f est continue en a si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$$

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en a.

Continuité à droite et à gauche

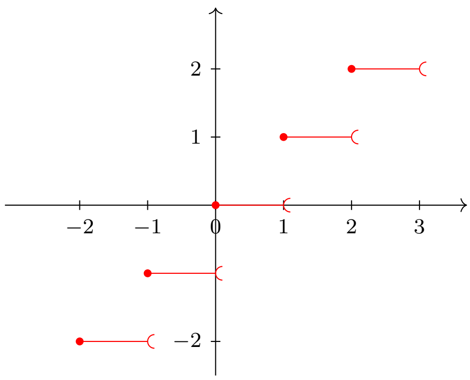
Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On dit que :

- f est *continue à gauche* en a si $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$;
- f est *continue à droite* en a si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

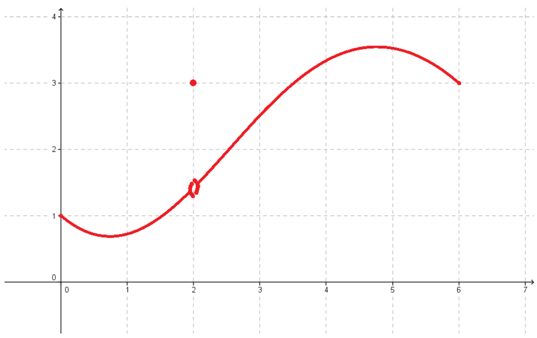
Exemples.

- La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$ mais elle n'est continue à gauche qu'aux points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.



Courbe représentative de la fonction partie entière.

- La fonction f représentée ici admet une limite à droite égale à la limite à gauche en $x = 2$. Elle n'est cependant pas continue en $x = 2$, ni même à gauche ou à droite, puisque cette limite n'est pas égale à $f(2)$.



Propriété 17

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathring{I}$.
La fonction f est continue en a si, et seulement si, f est continue à droite et à gauche en a.

Prolongement par continuité

Définition.

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est *prolongeable par continuité* en a s'il existe une fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ continue en a et telle que $\tilde{f}_{|I\backslash\{a\}} = f$.

Propriété 18

Soit $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Alors f est prolongeable par continuité en a si, et seulement si, f admet une limite **finie** ℓ en a.
Dans ce cas, un tel prolongement $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ est unique, donné par :

$$\tilde{f} : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}.$$

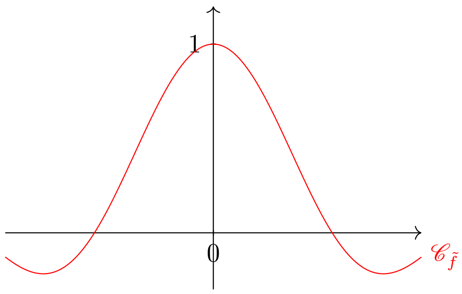
On l'appelle le *prolongement par continuité de f en a*. On le notera souvent f sans distinction par abus de notation.

Exemples.

- Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Puisque $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$, on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

  Ce prolongement est appelé *sinus cardinal*.



Courbe représentative de la fonction sinus cardinal.

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On rappelle que la fonction puissance d'exposant α, notée p_α, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$p_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}.$$

  Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} e^{\alpha \ln(x)} = 0$ et p_α peut être prolongée par continuité en 0 en posant $p_\alpha(0) = 0$.

  Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} e^{\alpha \ln(x)} = +\infty$ et p_α ne peut pas être prolongée par continuité en 0.

Caractérisation séquentielle de la continuité

Propriété 19 (Caractérisation séquentielle de la continuité en un point)

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Il y a équivalence entre :

(i) f est continue en a ;

(ii) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Exemple. Soient $f : I \to I$ une fonction continue, et (u_n) une suite définie par $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n). \qquad (*)$$

Si (u_n) converge vers une limite finie $\ell \in I$, alors ℓ est nécessairement un point fixe de f. En effet, puisque f est continue en ℓ, on obtient par caractérisation séquentielle, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$:

$$\ell = f(\ell).$$

Exercice 4. Montrer que la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

3.2 Continuité sur un intervalle

Définition.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue sur l'intervalle* I si elle est continue en tout point de I.
On note $\mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$.

Exemples. La fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, la fonction partie entière est continue sur chaque intervalle $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

Propriété 20 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g des fonctions continues sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Les fonctions $\lambda f + \mu g$, $f \times g$ sont continue sur I.

(2) Si de plus, g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.

Exemples. La fonction $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions polynomiales le sont également en tant que sommes et produits de fonctions continues. De même, les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriété 21

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ continue sur J, avec $f(I) \subset J$. Alors, la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Définition.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne sur* I s'il existe un nombre réel $k \geq 0$ tel que :

$$\forall (x, x') \in I^2, \quad |f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|.$$

On dira plus particulièrement dans ce cas que f est k-*lipschitzienne*.

Exercice 5. Montrer que la fonction valeur absolue est 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Propriété 22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Mise en garde.

La réciproque est fausse en général : par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, mais elle n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$. En effet, dans le cas contraire, il existerait $k > 0$ tel que :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}_+^2, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq k|x - x'| = k|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \times |\sqrt{x} + \sqrt{x'}|.$$

D'où pour $x \neq x'$:

$$1 \leq k(\sqrt{x} + \sqrt{x'}),$$

ce qui est faux si on choisit x et x' suffisamment petits.

Remarque. La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ car lipschitzienne. On en déduit en particulier que si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors $|f|$ l'est aussi par composition de fonctions continues.

Exercice 6. Montrer que, si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues sur I, alors $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues sur I.

3.3 Image continue d'un intervalle

Théorème 23 (*des valeurs intermédiaires*)

Soient a et b deux réels pour lesquels $a \leq b$ et $f \in \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$.
Pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarques.

- Le réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$ n'est pas unique en général.
- On dit souvent qu'une fonction est continue sur un intervalle quand on peut la tracer « sans lever le crayon ». Cela n'apparait pourtant pas clairement dans la définition de la continuité. C'est en fait une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires.

Le saviez-vous ?

Le mathématicien tchèque Bernard Bolzano (1781-1848) est l'un de ces oubliés dont on a retrouvé les résultats scientifiques de manière posthume. Prêtre dans l'empire autrichien (plus précisément en Bohème), son activité mathématique peut être essentiellement séparée en deux pans distincts :

- d'une part, son travail sur les « fonctions » qui l'amène à définir la continuité et à adopter une approche rigoureuse, par exemple pour démontrer la propriété des valeurs intermédiaires ;
- d'autre part, un important travail de logicien pour fournir des bases à tous les domaines scientifiques, qui influencera la génération suivante, notamment Georg Cantor ou Richard Dedekind.

Exercice 7. Soit f une fonction continue sur I et ne s'annulant pas sur I. Montrer que f garde un signe constant sur I.

Corollaire 24

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque. L'intervalle de départ et l'intervalle image ne sont pas en général de même nature (c'est-à-dire ouvert, semi-ouvert ou fermé). Par exemple si f est la fonction sinus :

$$f(]-\pi,\pi[) = [-1,1], \quad f(]0,\pi[) =]0,1].$$

Propriété 25

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors f est injective sur I si, et seulement si, f est strictement monotone.

Théorème 26 (*de la bijection*)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$;
- son application réciproque f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

Remarque. Avec l'hypothèse supplémentaire de stricte monotonie, on peut montrer que les intervalles I et $J = f(I)$ sont cette fois de même nature. Par exemple, si $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, je vous laisse montrer que $f([a,b[) = \left[f(a), \lim_b f \right[$.

3.4 Image continue d'un segment

Théorème 27 (*des bornes atteintes*)

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$, alors f possède un maximum et un minimum sur $[a,b]$: il existe $(c,d) \in [a,b]^2$ tel que :

$$\forall x \in [a,b], \quad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Corollaire 28

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

4 Extension aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Comme pour les suites, on peut étendre aux fonctions complexes toutes les propriétés des fonctions réelles qui ne font pas référence à la notion d'ordre sur $\mathbb{R}$. Les propriétés faisant intervenir la valeur absolue seront étendues en la remplaçant par le module.

Notation.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On note $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ les fonctions de I dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in I, \quad \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x)).$$

Définition.

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$.
On dit que f *admet une limite (finie)* $\ell \in \mathbb{C}$ *en* a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I, \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Propriété 29

Soient $f : I \to \mathbb{C}$ et $a \in \overline{I}$.
Alors f admet une limite en a si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ admettent des limites finies en a, et alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \mathrm{Re}(f)(x) + i \lim_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(x).$$

Corollaire 30

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x \to a} \overline{f(x)} = \overline{\ell}$.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que :

- f est *continue en* $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$;
- f est *continue sur* I si f est continue en tout point de I.

Propriété 31

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. Alors :

$$f \text{ est continue sur } I \iff \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont continues sur } I.$$

Corollaire 32

Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur I, alors $|f|$ est continue sur I.

Définition.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.
On dit que f est bornée si la fonction réelle $|f|$ est bornée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M.$$

Propriété 33

Si $f : I \to \mathbb{C}$ admet une limite en $a \in I$, alors f est bornée au voisinage de a.

Propriété 34

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes continue sur un segment $[a, b]$. Alors f est bornée.

Remarque. Résumons par un tableau ce qui reste valable ou non pour les fonctions à valeurs complexes.

Ce qui reste valable dans $\mathbb{C}$	**Ce qui n'est plus valable dans $\mathbb{C}$**
Unicité de la limite	Majorant/minorant/maximum/minimum
Une fonction ayant une limite finie en a	Monotonie
est bornée au voisinage de a	Limites infinies
Opérations sur les limites	Passage à la limite dans les inégalités
Opérations sur les fonctions continues	Théorème d'encadrement
	Théorème de la limite monotone
	Théorème des valeurs intermédiaires