

Polynômes

1	L'algèbre $\mathbb{K}[X]$	2
1.1	Définitions	2
1.2	Degré d'un polynôme	4
2	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	5
2.1	Divisibilité	5
2.2	Division euclidienne	6
2.3	Algorithme d'Euclide et PGCD	6
2.4	Polynômes premiers entre eux	7
2.5	PPCM de deux polynômes	8
2.6	Généralisation à plusieurs polynômes	8
2.7	Polynômes irréductibles	9
3	Racines d'un polynôme	10
3.1	Fonctions polynomiales	10
3.2	Racines	10
3.3	Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$	12
3.4	Ordre de multiplicité des racines	13
3.5	Polynômes scindés, relations coefficients-racines	13
4	Théorème fondamental de l'algèbre	15
4.1	Le théorème de d'Alembert-Gauss	15
4.2	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$	16
5	Polynômes interpolateurs de Lagrange	17
6	Fractions rationnelles	18
6.1	Le corps des fractions rationnelles	18
6.2	Racines et pôles	19
6.3	Décomposition en éléments simples	20

Compétences attendues.

- ✓ Effectuer la division euclidienne de polynômes, calculer le PGCD de deux polynômes.
- ✓ Déterminer la multiplicité d'une racine à l'aide de l'une des caractérisations.
- ✓ Exploiter les relations coefficients-racines.
- ✓ Décomposer un polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.
- ✓ Effectuer une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$ ou $\mathbb{C}(X)$.

1 L'algèbre $\mathbb{K}[X]$

Jusqu'ici, nous avons manipulé ce qu'on a appelé des *fonctions polynomiales*, c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$f : x \mapsto a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

définies sur $\mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels. La lettre x désigne une variable qu'on peut remplacer par n'importe quel réel, mais rien d'autre.

L'expression définissant f a également un sens sur $\mathbb{C}$. On peut donc définir une autre fonction $\tilde{f}$ qui à $z \in \mathbb{C}$ associe $\tilde{f}(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n$. En fait, cette expression définit une nouvelle fonction sur n'importe quel anneau dans lequel on sait multiplier par un réel, par exemple $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ou $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ)$.

L'idée ici est de traiter ce genre de fonctions sans préciser la nature de la variable, qu'on remplacera par ce qu'on appellera une indéterminée. L'intérêt est d'une part de traiter d'un seul coup toutes les fonctions associées à f , et d'autre part de mettre en évidence des résultats qui ne dépendent pas des propriétés sur la variable, simplement le fait qu'on sait en définir les puissances, les multiplier par un élément du corps $\mathbb{K}$, et les additionner.

Ainsi, on a intérêt à voir un polynôme comme un nouvel objet et pas comme une fonction. L'information importante dans l'expression de f et des fonctions qui lui sont associées, est la famille de coefficients $a_0, \dots, a_n$. On va donc définir un polynôme par la suite de ses coefficients.

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Définitions

Définition.

On appelle *polynôme* (à une indéterminée) à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite presque nulle d'éléments de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire toute suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, a_k = 0.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le coefficient a_k est appelé le *coefficient d'ordre k* du polynôme.

Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé *polynôme nul*, et on le note 0.

Propriété 1 (Égalité de deux polynômes)

Soient $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux polynômes. Alors :

- (1) $P = Q$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = b_k$.
- (2) $P = 0$ si, et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k = 0$.

Définition.

Soient $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit :

- la *somme* $P + Q$ de P et Q par : $P + Q = (a_k + b_k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- le *produit* $\lambda \cdot P$ de P par le *scalaire* λ par : $\lambda \cdot P = (\lambda a_k)_{k \in \mathbb{N}}$;
- le *produit* $P \times Q$ des polynômes P et Q par $P \times Q = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Propriété 2 (Opérations sur les polynômes)

Soient $P = (a_0, a_1, \dots, a_p, 0, \dots)$ et $Q = (b_0, b_1, \dots, b_q, 0, \dots)$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- (1) $\lambda \cdot P$ et $P + Q$ sont des polynômes ;
- (2) $P \times Q = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est un polynôme, et :

$$\bullet \quad c_k = 0 \text{ pour tout } k > p + q ; \quad \bullet \quad c_{p+q} = a_p b_q.$$

 Notation.

On notera X le polynôme $(0, 1, 0, \dots)$, appelé l'indéterminée. Avec le produit défini plus haut, on obtient $X^2 = (0, 0, 1, 0, \dots)$ et plus généralement (en effectuant une récurrence) :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad X^k = (0, \dots, 0, \underset{(k+1)^{\text{ème position}}}{1}, 0, \dots).$$

Par convention, on pose $X^0 = (1, 0, \dots)$. Le polynôme $P = (a_0, a_1, \dots, a_p, 0, \dots)$ s'écrit alors :

$$P = a_0(1, 0, \dots) + a_1(0, 1, 0, \dots) + \dots + a_p(0, 0, \dots, 1, 0, \dots) = a_0 \cdot X^0 + a_1 \cdot X + \dots + a_p \cdot X^p.$$

On s'autorisera aussi à noter $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ en gardant à l'esprit qu'il ne s'agit pas véritablement d'une somme infinie, puisque tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang.

On notera alors $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ en l'indéterminée X .

Exemple. Considérons les polynômes $P = (1, -2, 0, -1, 0, \dots)$ et $Q = (1, 0, 1, 0, \dots)$. Avec les notations introduites précédemment :

$$P = X^0 - 2X - X^3 \quad \text{et} \quad Q = X^0 + X^2.$$

Alors $P + Q = 2X^0 - 2X + X^2 - X^3$ et $P \times Q = X^0 - 2X + X^2 - 3X^3 - X^5$.

Propriété 3

- (1) $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif d'éléments neutres $0_{\mathbb{K}[X]} = 0$ pour $+$ et $1_{\mathbb{K}[X]} = X^0$ pour $\times$.
- (2) L'application $j : \lambda \in \mathbb{K} \mapsto \lambda \cdot X^0 \in \mathbb{K}[X]$ est un morphisme d'anneaux injectif, permettant d'identifier $\mathbb{K}$ comme sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$.

 Notation.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on notera alors plus simplement λ le polynôme $j(\lambda) = \lambda \cdot X^0$. Un tel polynôme sera dit *constant*. Cette identification permet de simplifier encore un peu l'écriture d'un polynôme $P = (a_0, a_1, \dots, a_p, 0, \dots)$ en $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_p X^p$.

Propriété 4

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

- (1) $\lambda \cdot (P + Q) = \lambda \cdot P + \lambda \cdot Q$;
- (2) $(\lambda + \mu) \cdot P = \lambda \cdot P + \mu \cdot P$;
- (3) $\lambda \cdot (\mu \cdot P) = (\lambda \mu) \cdot P$;
- (4) $(\lambda \cdot P) \times Q = \lambda \cdot (P \times Q) = P \times (\lambda \cdot Q)$.

On dit alors que $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une *algèbre*, appelée *l'algèbre des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$* .

Propriété 5

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(1) \quad (P + Q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^k Q^{n-k} ; \quad (2) \quad P^n - Q^n = (P - Q) \times \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}.$$

Définition.

Soient $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q = \sum_{i=0}^q b_i X^i$ sont deux polynômes. On définit le *polynôme composé* $P \circ Q$ par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^p a_k Q^k = \sum_{k=0}^p a_k \left(\sum_{i=0}^q b_i X^i \right)^k.$$

Exemples.

- Si $P = X^2 + 1$ et $Q = X - 2$, alors :

$$P \circ Q = (X - 2)^2 + 1 = X^2 - 4X + 5 \quad \text{et} \quad Q \circ P = X^2 + 1 - 2 = X^2 - 1$$

- Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$, le polynôme $P \circ (X + a)$ sera noté $P(X + a)$. En particulier si $a = 0$, alors $P(X)$ n'est autre que le polynôme P (que nous pourrions donc noter indifféremment P ou $P(X)$).
- Si $P = \lambda \in \mathbb{K}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, alors $P \circ Q = \lambda$.

**Mise en garde.**

Ne pas confondre $P(X + 1)$, qui désigne le polynôme P composé avec $X + 1$, et $P \times (X + 1)$, le produit des polynômes P et $(X + 1)$. Partons du principe que si on avait souhaité parler de ce produit, on l'aurait plutôt noté $(X + 1)P$, ou alors carrément $P \times (X + 1)$.

1.2 Degré d'un polynôme**Définition.**

Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ un polynôme non nul.

- On appelle *degré de P* , et on note $\deg(P)$, l'entier $\deg(P) = \max(\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\})$.

Par convention, le degré du polynôme nulle est égal à $-\infty$.

- Si $n = \deg(P)$, le coefficient a_n est appelé *coefficient dominant de P* .

On dit que P est *unitaire* si son coefficient dominant a_n vaut 1.

Exemple. Le polynôme $P = -2X^3 + X^2 - 1$ est de degré 3 et son coefficient dominant est -2 . P n'est pas unitaire, mais $-\frac{1}{2}P$ l'est.

Remarque. Un polynôme P est constant si, et seulement si, $\deg(P) \leq 0$.

Propriété 6 (Opérations et degré)

Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Alors :

(1) pour tout $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$.

(2) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

De plus, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

(3) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

(4) Si $\deg(Q) \geq 1$, alors $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \times \deg(Q)$.

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{K}[X]$ satisfaisant $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Propriété 7 (Intégrité et éléments inversibles de l'anneau des polynômes)

(1) L'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est *intègre*. Autrement dit :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad P \times Q = 0_{\mathbb{K}[X]} \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{K}[X]} \text{ ou } Q = 0_{\mathbb{K}[X]}.$$

(2) Le groupe $(\mathcal{U}(\mathbb{K}[X]), \times)$ des inversibles de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est $(\mathbb{K}^*, \times)$. Autrement dit, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$:

$$\exists Q \in \mathbb{K}[X], \quad P \times Q = 1 \Leftrightarrow P \in \mathbb{K}^*.$$

 Notation.

Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieurs ou égaux à n .

Avec cette notation, $\mathbb{K}_0[X]$ désigne en particulier l'ensemble des polynômes constants de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 8

L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaison linéaire :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2, \lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X].$$

**Mise en garde.**

Si $n \geq 1$, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas stable par produit. En particulier, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas un sous-anneau de $\mathbb{K}[X]$.

2 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

2.1 Divisibilité

Définition.

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$.

On dit que A *divise* B ou que B est un *multiple* de A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $B = AQ$.

 Notation.

On désigne par $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des diviseurs d'un polynôme A , et par $A\mathbb{K}[X] = \{AQ, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des multiples de A .

Exemples. Dans $\mathbb{K}[X]$, $X - 1 \mid X^n - 1$ et $X + 1 \mid X^{2n+1} + 1$.

Remarque. A divise B si, et seulement si, $B\mathbb{K}[X] \subset A\mathbb{K}[X]$.

Propriété 9 (Caractérisation des polynômes associés)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$(A \mid B \text{ et } B \mid A) \Leftrightarrow A\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B.$$

Si l'une de ces assertions est vérifiée, on dit alors que A et B sont des *polynômes associés*.

Remarque. On notera que deux polynômes unitaires et associés sont égaux.

2.2 Division euclidienne

Théorème 10 (de la division euclidienne)

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}.$$

Les polynômes Q et R sont appelés le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B .

Exercice 2. Effectuer la division de $A = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ par $B = X^3 + X^2 + X - 3$.

Propriété 11

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. Alors :

$$B \text{ divise } A \Leftrightarrow \text{le reste de la division euclidienne de } A \text{ par } B \text{ est nul.}$$

2.3 Algorithme d'Euclide et PGCD de deux polynômes

Définition.

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$, $(A, B) \neq (0_{\mathbb{K}[X]}, 0_{\mathbb{K}[X]})$.

On appelle *plus grand commun diviseur* (en abrégé PGCD) de A et B , tout diviseur commun à A et B de degré maximal.

Algorithme d'Euclide. Soient A et B deux polynômes, $B \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$. On définit une suite (R_k) de polynômes par :

- $R_0 = A$, $R_1 = B$;
- Supposons avoir défini les polynômes R_{k-1} et R_k pour un certain rang $k \geq 1$. Si $R_k \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on effectue la division euclidienne de R_{k-1} par R_k :

$$R_{k-1} = Q_k R_k + R_{k+1} \text{ avec } \deg(R_{k+1}) < \deg(R_k).$$

La suite d'entiers naturels $(\deg(R_k))$ étant strictement décroissante, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(R_N) \geq 0$ et $R_{N+1} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

Propriété 12

- (1) $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(R_N)$.
- (2) R_N est un PGCD de A et B . De plus, tout PGCD de A et B est associé à R_N .
- (3) A et B admettent un unique PGCD unitaire que l'on notera $A \wedge B$.

Remarque. Par convention, $0_{\mathbb{K}[X]} \wedge 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]}$.

En adaptant les démonstrations données dans $\mathbb{Z}$, on obtient les propriétés suivantes du PGCD :

- $(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, D = \lambda(A \wedge B)) \Leftrightarrow \begin{cases} D \mid A \text{ et } D \mid B \\ \forall P \in \mathbb{K}[X], (P \mid A \text{ et } P \mid B) \Rightarrow P \mid D \end{cases}$
- Associativité du PGCD : pour $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$, $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$.
- Homogénéité du PGCD : pour $A, B, P \in \mathbb{K}[X]$ avec P unitaire, $(PA) \wedge (PB) = P(A \wedge B)$.

À l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu (identique à celui pour les entiers), on montre la :

Propriété 13 (Identité de Bezout)

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$AU + BV = A \wedge B.$$

Exercice 3. Calculer le PGCD et déterminer un couple de Bezout pour les polynômes $A = 2X^4 + X^3 - X^2 - X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X - 3$.

2.4 Polynômes premiers entre eux**Définition.**

On dit que deux polynômes A et B sont *premiers entre eux* si $A \wedge B = 1$.

Théorème 14 (de Bezout)

Deux polynômes A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = 1$.

Corollaire 15

Soient $n, p, q \geq 1$ et des polynômes $A, B, B_1, \dots, B_n$.

- (1) Si A est premier avec chacun des B_i pour $i = 1, \dots, n$, alors A est premier avec $B_1 \times \dots \times B_n$.
- (2) Si A est premier avec B , alors A^p est premier avec B^q .

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ distincts, et $p, q \geq 1$. Montrer que $(X - a)^p$ et $(X - b)^q$ sont premiers entre eux.

Corollaire 16

Soient A, B, C des polynômes tels que A divise C , B divise C et A et B sont premiers entre eux. Alors AB divise C .

Corollaire 17 (Théorème de Gauss)

Soient A, B, C des polynômes tels que A divise BC et A est premier avec B . Alors A divise C .

2.5 PPCM de deux polynômes**Définition.**

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ non nuls.

On appelle *plus petit commun multiple* (en abrégé PPCM) de A et B , tout multiple commun non nul de A et B de degré minimal.

Propriété 18

Soient A et B deux polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$.

- (1) Si M et N sont deux PPCM de A et B , alors M et N sont associés : il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $M = \lambda N$.
- (2) A et B admettent un unique PPCM unitaire que l'on notera $A \vee B$.

Remarque. Par convention, pour tout polynôme A , $A \vee 0 = 0$.

En adaptant les démonstrations données dans $\mathbb{Z}$, on montre les propriétés suivantes du PPCM :

- $(\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, M = \lambda(A \vee B)) \Leftrightarrow \begin{cases} A \mid M \text{ et } B \mid M \\ \forall P \in \mathbb{K}[X], (A \mid P \text{ et } B \mid P) \Rightarrow M \mid P \end{cases}$
- Pour deux polynômes unitaires ou nuls A et B , $A \times B = (A \wedge B) \times (A \vee B)$.
- Associativité et homogénéité du PPCM.

2.6 Généralisation au PGCD et PPCM de plusieurs polynômes**Définition.**

Soit $n \geq 1$. On considère n polynômes $A_1, \dots, A_n$ non tous nuls de $\mathbb{K}[X]$.

On appelle *plus grand commun diviseur* de $A_1, \dots, A_n$, tout diviseur commun de $A_1, \dots, A_n$ de degré maximal.

Propriété 19

Soit $n \geq 1$. On considère n polynômes $A_1, \dots, A_n$ non tous nuls de $\mathbb{K}[X]$. Alors D est un PGCD de $A_1, \dots, A_n$ si, et seulement si, il vérifie :

- $D \mid A_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$;
- pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si $P \mid A_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $P \mid D$.

De plus, tous les PGCD de $A_1, \dots, A_n$ sont associés. On notera $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ l'unique PGCD unitaire de $A_1, \dots, A_n$.

Propriété 20

Si $D = A_1 \wedge \dots \wedge A_n$, alors il existe $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D = \sum_{i=1}^n A_i U_i$.

Définition.

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$, avec $n \geq 1$. Les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont dits :

- *premiers entre eux deux à deux* si $A_i \wedge A_j = 1$ pour tout $i \neq j$.
- *premiers dans leur ensemble* si $A_1 \wedge \dots \wedge A_n = 1$.

Remarque. Si les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux deux à deux, alors ils sont premiers dans leur ensemble. La réciproque est fautive en générale.

2.7 Polynômes irréductibles**Définition.**

Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible sur $\mathbb{K}$* s'il satisfait :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad P = A \times B \Rightarrow \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0.$$

Remarque. Les polynômes irréductibles sont les analogues dans $\mathbb{K}[X]$ des nombres premiers dans $\mathbb{N}$.

Exercice 5. Montrer que les polynômes de degré un sont irréductibles sur $\mathbb{K}$.

Propriété 21

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$, et $A, A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$ (avec $n \geq 1$). Alors :

- (1) soit P divise A , soit P est premier avec A ;
- (2) si P divise le produit $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, alors il divise l'un des facteurs $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Théorème 22 (Théorème fondamental de l'arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$)

Tout polynôme non constant A se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un produit de polynômes irréductibles unitaires :

$$A = \lambda \prod_{k=1}^r P_k^{\alpha_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $r \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_r$ des polynômes irréductibles et unitaires deux à deux distincts, et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des entiers naturels non nuls.

Comme dans $\mathbb{Z}$, on établira que le PGCD et le PPCM de deux ou plusieurs polynômes peuvent être obtenus à partir de leur factorisation en produit de polynômes irréductibles.

3 Racines d'un polynôme

3.1 Fonctions polynomiales

À partir d'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on va associer une fonction définie sur $\mathbb{K}$.

Définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *fonction polynomiale associée à P* , la fonction $\tilde{P} : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \tilde{P}(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

On note $\mathcal{P}_{\mathbb{K}} = \{x \mapsto \tilde{P}(x) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ formé des fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Propriété 23

L'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{K}} \\ P & \mapsto \tilde{P}. \end{cases}$ satisfait :

- (1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \Phi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) = \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q) ;$
- (2) $\forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \Phi(P \times Q) = \Phi(P) \times \Phi(Q) ;$
- (3) $\Phi(1_{\mathbb{K}[X]}) = 1_{\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})}.$

En particulier, $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$ est un sous-anneau de $(\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}), +, \times)$, et Φ est un morphisme d'anneaux surjectif de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{K}}$.

Définition.

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. On appelle *évaluation de P en a* l'élément $\tilde{P}(a)$ de $\mathbb{K}$. Par abus de notation, on le notera $P(a)$, et on parlera de la *valeur de P en a* .



Pour aller plus loin.

Les définitions et propriétés données dans cette section se généralisent au cas d'une algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ sur $\mathbb{K}$. En effet, à tout polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on peut associer une application $\Phi_A(P) : A \rightarrow A$ définie par :

$$\Phi_A(P) : x \mapsto a_0 1_A + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Ainsi :

- si $A = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'évaluation de P en la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qu'on note simplement $P(M)$, est :

$$P(M) = a_0 I_n + a_1 M + \cdots + a_n M^n.$$

- si $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \circ, \cdot)$, l'évaluation de P en la fonction $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qu'on note simplement $P(f)$, est :

$$P(f) = a_0 \text{id}_{\mathbb{R}} + a_1 f + \cdots + a_n f^n.$$

3.2 Racines

Définition.

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une *racine (ou un zéro) de P* si $P(a) = 0$.

Remarques.

- Il est bon de préciser dans quel corps on se place lorsqu'on parle de racine. Par exemple, le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$, mais en a deux dans $\mathbb{C}$. De même, $X^3 - 2$ n'a aucune racine dans $\mathbb{Q}$, en a une dans $\mathbb{R}$ et trois dans $\mathbb{C}$.
- Si P divise Q , alors toute racine de P est une racine de Q .

Exemple. Tout polynôme $aX + b$ de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$ a une racine $-\frac{b}{a}$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 24

Soit $a \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$a \text{ est racine de } P \Leftrightarrow (X - a) \mid P.$$

Exercice 6. Déterminer une racine évidente α de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$, puis factoriser P .

Exercice 7. Montrer que si $P \in \mathbb{K}[X]$ est de degré 2 ou 3 et sans racine dans $\mathbb{K}$, alors P est irréductible sur $\mathbb{K}$.

Propriété 25

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts. Alors :

$$a_1, a_2, \dots, a_n \text{ sont racines de } P \Leftrightarrow (X - a_1) \dots (X - a_n) \mid P.$$

Théorème 26

- (1) Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines distinctes.
- (2) Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ qui admet au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul.
- (3) Un polynôme qui admet une infinité de racines est le polynôme nul.

Propriété 27

L'application $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{K}} \\ P & \mapsto \tilde{P} \end{cases}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -algèbres.

Remarques.

- Ce résultat nous autorise à identifier les polynômes et les fonctions polynomiales.
- Plus généralement, si A est une partie infinie de $\mathbb{K}$, alors $P \mapsto \tilde{P}|_A$ est une bijection de $\mathbb{K}[X]$ sur l'ensemble des fonctions polynomiales sur A , de sorte que pour un polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$:

$$\begin{aligned} P = 0_{\mathbb{K}[X]} & \Leftrightarrow \tilde{P} = 0_{\mathcal{F}(A, \mathbb{K})} \\ \text{(c'est-à-dire } a_k = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}) & \quad \text{(c'est-à-dire } \tilde{P}(t) = 0 \text{ pour tout } t \in A) \end{aligned}$$

Par exemple, on peut identifier $\mathbb{K}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}_+$ ou sur $[0, 1]$.

Exercice 8. Montrer que la fonction racine carrée n'est pas une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}_+$.

3.3 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Définition.

Soit $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k \in \mathbb{K}_p[X]$ un polynôme. On définit le *polynôme dérivé* de P , noté P' , par :

$$P' = \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1} = \sum_{i=0}^{p-1} (i+1) a_{i+1} X^i \in \mathbb{K}_{p-1}[X].$$

Plus généralement, on note $P^{(0)} = P$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$.



Pour aller plus loin.

Cette définition s'inspire des règles bien connues de dérivation des fonctions polynomiales à coefficients réels. Ainsi pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\Phi(P') = \Phi(P)'$ pour tout polynôme P , où la dérivée de droite est celle des fonctions numériques de la variable réelle. On étend ici ces règles pour définir formellement la notion de polynôme dérivé quel que soit le corps $\mathbb{K}$.

Propriété 28

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors :

- (1) $P' = 0 \Leftrightarrow P$ est constant.
- (2) si $\deg(P) \geq 1$, alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
- (3) $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
- (4) $(P \times Q)' = P' \times Q + P \times Q'$.
- (5) $(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$.

Propriété 29

Soient $n \in \mathbb{N}$, $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- (1) Si $\deg(P) = n$, alors $\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k$ si $k \leq n$ et $P^{(k)} = 0$ pour tout $k > n$.
- (2) $(\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$.

Propriété 30 (Formule de Leibniz)

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Propriété 31 (Formule de Taylor)

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$, et $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

Remarque. En particulier pour $a = 0$, on obtient par identification des coefficients :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}.$$

3.4 Ordre de multiplicité des racines d'un polynôme

Propriété 32

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

- (i) $(X - a)^r$ divise P ;
- (ii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^r Q$;
- (iii) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a) = 0$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dit que a est racine de P de multiplicité au moins r .

Propriété 33

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Il y a équivalence entre :

- (i) $(X - a)^m$ divise P et $(X - a)^{m+1}$ ne divise pas P ;
- (ii) il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$, $P = (X - a)^m Q$ et $Q(a) \neq 0$;
- (iii) $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Si l'une de ces conditions est satisfaite, on dit que a est racine de P de multiplicité m exactement.

Vocabulaire. Lorsque $m \geq 2$, on parle de racine multiple. Les racines d'ordre 1,2,3 de P sont respectivement appelés racines simples, doubles, triples de P .

Exercice 9. Déterminer l'ordre de multiplicité m de 1 comme racine de $P = X^5 - 7X^4 + 19X^3 - 25X^2 + 16X - 4$, et déterminer $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - 1)^m Q$.

Propriété 34

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ des scalaires deux à deux distincts (avec $k \geq 1$) et $r_1, \dots, r_k \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \alpha_i \text{ racine de } P \text{ de multiplicité au moins } r_i \\ \text{pour tout } i \in \llbracket 1, k \rrbracket \end{aligned} \Leftrightarrow (X - \alpha_1)^{r_1} \dots (X - \alpha_k)^{r_k} \mid P.$$

Corollaire 35

Un polynôme de degré n a au plus n racines **comptées avec leurs ordres de multiplicité**.

3.5 Polynômes scindés, relations coefficients-racines

Définition.

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est *scindé sur $\mathbb{K}$* s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes du premier degré de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \dots (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Le scalaire λ est alors le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ses racines distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k$.

Remarques.

- La notion de polynôme scindé dépend du corps $\mathbb{K}$ considéré : par exemple, $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$ est scindé sur $\mathbb{C}$, mais pas sur $\mathbb{R}$ car $i \notin \mathbb{R}$.
- Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé et irréductible sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, $\deg(P) = 1$.

Propriété 36

Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, son degré est égal à la somme des ordres de multiplicité de ses racines dans $\mathbb{K}$.

Exemple. Le polynôme $X^n - 1$ est de degré n et admet n racines distinctes dans $\mathbb{C}$, les racines n -ièmes de l'unité. Donc $X^n - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$. Puisque $X^n - 1$ est de plus unitaire, il s'écrit :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right).$$

On étudie à présent les relations entre coefficients et racines des polynômes scindés. Rappelons la :

Propriété 37 (Relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 2)

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont racines de } P \text{ dans } \mathbb{K} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \\ \alpha_1 \alpha_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$

Ce résultat se généralise aux polynômes de degré n de la manière suivante :

Définition.

On considère n scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, distincts ou non, appartenant à $\mathbb{K}$.

Les *fonctions symétriques élémentaires* de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les fonctions définies par :

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \dots \alpha_{i_k} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Exemple. Pour $n = 3$, $\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\sigma_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$ et $\sigma_3 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Propriété 38 (Relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé)

On considère un polynôme scindé de degré n de $\mathbb{K}[X]$ s'écrivant :

$$P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = a_n (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_n).$$

Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les fonctions symétriques élémentaires de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, alors :

$$P = a_n (X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n \sigma_n)$$

et par identification :

$$\sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Exemple. Le polynôme $P = X^n - 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$ et ses racines sont exactement les racines n -ièmes de l'unité. D'après les relations coefficients racines :

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0, \quad \sigma_2 = \sum_{0 \leq k < \ell \leq n-1} e^{\frac{2i(k+\ell)\pi}{n}} = 0, \quad \dots, \quad \sigma_n = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^n \frac{-1}{1} = (-1)^{n+1}.$$

Le saviez-vous ?

Penchons nous sur le problème inverse : existe-t-il des formules permettant d'exprimer les racines d'un polynôme P à partir de ses coefficients. Le cas $\deg(P) = 2$ est résolu depuis bien longtemps, puisque les Babyloniens connaissaient déjà les formules que vous avez apprises au lycée. La question s'est alors posée de généraliser ces résultats pour $\deg(P) \geq 3$. Plus précisément, existe-t-il des formules analogues pour des équations polynomiales de degré supérieur, permettant d'exprimer les solutions uniquement avec les coefficients de P et les opérations « + », « × » et « $\sqrt[n]{}$ » avec $n \geq 2$? Si c'est effectivement le cas, l'équation est dite *résoluble par radicaux*.

Il a fallu attendre le 16^{ème} siècle pour que de telles formules soient obtenues pour les équations polynomiales de degré 3. La solution nous vient d'Italie, où les mathématiciens Tartaglia et Scipione del Ferro découvrent à peu près en même temps ce qu'on appelle aujourd'hui la méthode de Cardan. Cardan, quant à lui, a plus ou moins volé le travail de Tartaglia et l'a publié en son nom. Quelques années plus tard, un certain Ferrari, élève de Cardan, résout quant à lui les équations de degré 4. Ces formules étant cependant bien compliquées, on ne les enseigne pas dans nos classes.

Le cas des équations polynomiales de degré $d \geq 5$ sera traité 200 ans plus tard. En 1824, dans un texte qui restera incompris quelques années, le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel ⁽¹⁸⁰²⁻¹⁸²⁹⁾ montre qu'aucune formule générale de résolution des équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5 n'est possible. Il est donc inutile de s'évertuer à chercher de telles formules, elles n'existent pas !

Le Français Évariste Galois ⁽¹⁸¹¹⁻¹⁸³²⁾, sans connaître les résultats d'Abel, obtient un résultat plus précis : pour n'importe quelle équation polynomiale donnée, il propose un critère pour déterminer si oui ou non, cette équation est résoluble par radicaux. Ce résultat donne ainsi une réponse complète au problème de la résolubilité d'une équation polynomiale.

Provoqué dans un duel lié à une histoire d'amour malheureuse, Galois meurt à l'âge de 20 ans. À la veille de ce duel, il dresse dans une lettre le bilan de ses recherches et demande à ce que Jacobi ou Gauss donnent leur avis « sur l'importance de (ses) théorèmes ». Le mathématicien français Joseph Liouville ⁽¹⁸⁰⁹⁻¹⁸⁸²⁾ publiera ses oeuvres scientifiques quatorze ans plus tard à titre posthume, ce qui donnera à Galois une renommée internationale. Ses idées ont eu une portée considérable, aboutissant à l'introduction de notions fondamentales, et sont toujours fécondes aujourd'hui^a.



Évariste Galois (1811 - 1832).

^aPour en connaître davantage sur la vie d'Evariste Galois, je vous conseille cette [vidéo](#).

4 Théorème fondamental de l'algèbre

4.1 Le théorème de d'Alembert-Gauss

Théorème 39 (*Théorème de d'Alembert-Gauss*)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Le saviez-vous ?

Ce résultat, parfois appelé *théorème fondamental de l'algèbre* a connu une première tentative de démonstration par d'Alembert, mais la première preuve vraiment rigoureuse est due à Gauss, qui en donna au moins quatre preuves différentes.

Corollaire 40

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

On traduit cette propriété en disant que $\mathbb{C}$ est un *corps algébriquement clos*.

Corollaire 41

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, avec P non nul

- (1) P divise Q si, et seulement si, toutes les racines de P sont des racines de Q , avec une multiplicité dans Q supérieure ou égale à la multiplicité dans P .
- (2) P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$.
- (3) P est à racines simples dans $\mathbb{C}$ si, et seulement si, P est premier avec P' .

4.2 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ **Propriété 42** (Factorisation irréductible sur $\mathbb{C}$)

- (1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.
- (2) Tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{C}[X]$ sous la forme :

$$P(X) = \lambda \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^{m_i}$$

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les racines distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$.

Propriété 43

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients **réels**, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

Si z est racine de P de multiplicité m , alors $\bar{z}$ est aussi racine de P de multiplicité m .

Propriété 44 (Factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$)

- (1) Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
 - les polynômes de degré 1 ;
 - les polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif.
- (2) Tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ se factorise de manière unique (à l'ordre près des facteurs) en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme :

$$P(X) = \lambda \left(\prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)^{m_i} \right) \left(\prod_{j=1}^q (X^2 - (z_j + \bar{z}_j)X + z_j \bar{z}_j)^{n_j} \right)$$

où λ est le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines réelles de P de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$ et $z_1, \bar{z}_1, \dots, z_q, \bar{z}_q$ les racines complexes non réelles de P de multiplicités $n_1, \dots, n_q$.



Méthode. Comment factoriser un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ en produits d'irréductibles ?

Pour factoriser sur $\mathbb{R}$, on peut factoriser sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les termes complexes conjugués.

Exercice 10. Factoriser en produit d'irréductibles les polynômes $X^4 + 1$ et $X^n - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

5 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Dans cette partie, on considère $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ **deux à deux distincts**, et $\beta_0, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$. Le problème de l'*interpolation polynomiale* consiste à déterminer un polynôme P de degré minimal tel que $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Traitons pour commencer le cas où $(\beta_0, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

Propriété 45

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Il existe un unique polynôme L_i dans $\mathbb{K}_n[X]$ satisfaisant

$$L_i(\alpha_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

Définition.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on appelle *i-ème polynôme de Lagrange associé à $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$* le polynôme :

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k} = \frac{X - \alpha_0}{\alpha_i - \alpha_0} \dots \frac{X - \alpha_{i-1}}{\alpha_i - \alpha_{i-1}} \frac{X - \alpha_{i+1}}{\alpha_i - \alpha_{i+1}} \dots \frac{X - \alpha_n}{\alpha_i - \alpha_n} \in \mathbb{K}_n[X].$$

Il vérifie $L_i(\alpha_j) = \delta_{i,j}$ pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Propriété 46

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$.

(1) Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ satisfaisant $P(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, à savoir :

$$P = \beta_0 L_0 + \beta_1 L_1 + \dots + \beta_n L_n.$$

(2) Les polynômes $Q \in \mathbb{K}[X]$ satisfaisant $Q(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ sont exactement ceux de la forme $P + R \prod_{k=0}^n (X - \alpha_k)$ où R décrit $\mathbb{K}[X]$.



Pour aller plus loin.

Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un segment $[a, b]$ et $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in [a, b]$ deux à deux distincts. Par ce qui précède, il existe un unique polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ tel que :

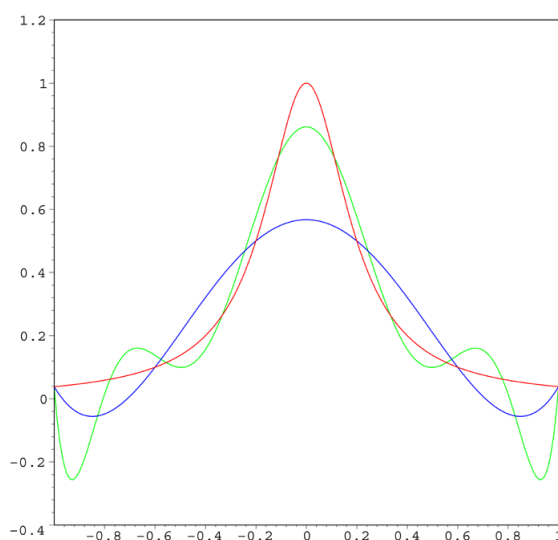
$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(\alpha_i) = f(\alpha_i).$$

Le polynôme P est appelé *polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $\alpha_0, \dots, \alpha_n$* . La fonction polynomiale associée coïncide avec f en ces points.

Pour « approcher au mieux » f par une fonction polynomiale, une idée naturelle serait d'augmenter le nombre de points d'interpolation. Il semble en effet raisonnable de penser que la courbe représentative du polynôme interpolateur de Lagrange de f va converger (dans un sens qu'il faudrait préciser) vers celle de f si on augmente le nombre de points où ces deux courbes coïncident.

Ce n'est cependant pas le cas en général. Par exemple, si on choisit des points d'interpolation équi-répartis sur $[a, b]$, on peut observer pour certaines fonctions (même de classe $\mathcal{C}^\infty$) qu'au contraire, l'approximation est de plus en plus mauvaise lorsque n augmente, particulièrement sur les extrémités du segment : on parle de *phénomène de Runge*.

Une solution pour corriger ce problème et ainsi obtenir de « bonnes approximations polynomiales » de f est de choisir nos points d'interpolation de manière plus optimale, en concentrant davantage ces points sur les extrémités du segment $[a, b]$ où ce phénomène se produit.



Courbes représentatives d'une fonction f (en rouge) et de ses polynômes interpolateurs de degré 5 (courbe bleue) et de degré 9 (courbe verte).

6 Fractions rationnelles

6.1 Le corps des fractions rationnelles

Donnons les principales étapes de la construction du corps des fractions rationnelles.

On définit sur $\mathcal{F} = \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ une relation binaire $\sim$ par :

$$(P_1, Q_1) \sim (P_2, Q_2) \Leftrightarrow P_1 Q_2 = P_2 Q_1.$$

On montre sans difficulté (mais en utilisant de manière prépondérante l'intégrité de $\mathbb{K}[X]$) que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}$.

Définition.

On appelle *fraction rationnelle* sur $\mathbb{K}$ toute classe d'équivalence de $\mathcal{F}$ pour la relation $\sim$.

Notation.

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathcal{F} / \sim$ des classes d'équivalence pour la relation $\sim$.

Pour tout $(P, Q) \in \mathcal{F}$, on note $\frac{P}{Q}$ sa classe d'équivalence.

Remarque. Par définition, $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$ si, et seulement si, $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$.

Propriété 47

Tout élément F de $\mathbb{K}(X)$ peut s'écrire $F = \frac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$.

Une telle écriture est appelée *forme irréductible de F* , et est unique à multiplication près par des scalaires non nuls.

Propriété 48

(1) On définit deux lois de composition internes $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$ en posant, pour tout $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$:

$$F + G = \frac{AD + BC}{BD} \quad \text{et} \quad F \times G = \frac{AC}{BD}.$$

(2) L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ muni des lois $+$ et $\times$ est un corps, d'éléments neutres $\frac{0}{1}$ pour $+$ et $\frac{1}{1}$ pour $\times$.

(3) L'application $j : P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ est un morphisme d'anneaux injectif, permettant d'identifier la fraction rationnelle $\frac{P}{1}$ au polynôme P , et donc de voir $\mathbb{K}[X]$ comme un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$.

Définition.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors la quantité $\deg(A) - \deg(B)$ ne dépend pas du représentant $\frac{A}{B}$ de F . On l'appelle le *degré de F* et on le note $\deg(F)$.

Exemple. $\deg\left(\frac{X^2 + 1}{X^3(X^2 + 2)}\right) = 2 - 5 = -3$.

Remarque. On vérifie que :

- pour tout $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$ et $\deg(F \times G) = \deg(F) + \deg(G)$,
- pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) = \deg\left(\frac{P}{1}\right)$.

6.2 Racines et pôles**Définition.**

Soit $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle écrite sous **forme irréductible**.

On appelle *zéro de F* toute racine de A et *pôle de F* toute racine de B . L'*ordre d'un zéro* (resp. *d'un pôle*) de F est alors sa multiplicité en tant que racine de A (resp. de B).

Définition.

Soient $F = \frac{A}{B}$ une fraction rationnelle écrite sous **forme irréductible**, et E l'ensemble des pôles de F .

On appelle *fonction rationnelle associée à F* la fonction

$$\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus E & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \frac{A(x)}{B(x)} \end{cases}.$$

Propriété 49

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que :

$$F = E + Q \text{ et } \deg(Q) < 0.$$

On dit alors que E est la partie entière de F .

**Méthode. Comment obtenir la partie entière d'une fraction rationnelle ?**

Pour obtenir la partie entière d'une fraction rationnelle $F = \frac{A}{B}$, on effectue la division euclidienne de A par B : E est le quotient dans cette division euclidienne.

6.3 Décomposition en éléments simples**Théorème 50 (Décomposition en éléments simples)**

Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ de degré strictement négatif, et soit $Q = Q_1^{\alpha_1} \cdots Q_n^{\alpha_n}$ la décomposition de Q en produit de facteurs irréductibles.

Il existe une unique famille de polynômes $A_{1,1}, \dots, A_{1,\alpha_1}, \dots, A_{n,1}, \dots, A_{n,\alpha_n}$ tels que :

$$F = \frac{A_{1,1}}{Q_1} + \frac{A_{1,2}}{Q_1^2} + \cdots + \frac{A_{1,\alpha_1}}{Q_1^{\alpha_1}} + \frac{A_{2,1}}{Q_2} + \cdots + \frac{A_{2,\alpha_2}}{Q_2^{\alpha_2}} + \cdots + \frac{A_{n,1}}{Q_n} + \cdots + \frac{A_{n,\alpha_n}}{Q_n^{\alpha_n}} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{A_{i,k}}{Q_i^k}$$

avec pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $k \in \llbracket 1, \alpha_i \rrbracket$, $\deg(A_{i,k}) < \deg(Q_i)$.

Corollaire 51 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$, avec $B = \alpha \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i}$. Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[X]$ et une unique famille de complexes $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \alpha_{2,1}, \dots, \alpha_{2,m_2}, \dots, \alpha_{n,m_n}$ tels que :

$$\begin{aligned} F &= E + \frac{\alpha_{1,1}}{X - \lambda_1} + \cdots + \frac{\alpha_{1,m_1}}{(X - \lambda_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{\alpha_{n,1}}{X - \lambda_n} + \cdots + \frac{\alpha_{n,m_n}}{(X - \lambda_n)^{m_n}} \\ &= E + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,k}}{(X - \lambda_i)^k}. \end{aligned}$$

Corollaire 52 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)

Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{R}(X)$, où la décomposition en produit de facteurs irréductibles de B est

$$B = \alpha \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)^{m_i} \prod_{k=1}^r (X^2 + b_k X + c_k)^{p_k}.$$

Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$ et une unique famille de réels $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \dots, \alpha_{n,m_n}, \beta_{1,1}, \dots, \beta_{1,p_1}, \dots, \beta_{r,p_r}, \gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{r,p_r}$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - \lambda_i)^j} + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^{p_k} \frac{\beta_{k,\ell} X + \gamma_{k,\ell}}{(X^2 + b_k X + c_k)^\ell}.$$

Remarque. Les méthodes rencontrées en début d'année pour le calcul de la décomposition en éléments simples restent valables. Ajoutons deux choses :

- Si α est un pôle simple de F , c'est-à-dire si $F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - \alpha)Q_1}$, avec $Q_1(\alpha) \neq 0$, alors la partie polaire de F associée à α est de la forme $\frac{\lambda}{X - \alpha}$ et :

$$\lambda = \frac{P}{Q_1} \Big|_{X=\alpha} = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

car $Q' = ((X - \alpha)Q_1)' = (X - \alpha)Q_1' + Q_1$, et donc $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$.

- Pour une fraction rationnelle réelle, on pourra la décomposer sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les termes conjugués deux à deux afin d'obtenir sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$. On pensera aussi à prendre le conjugué de sa décomposition sur $\mathbb{C}$ et utiliser l'unicité afin d'obtenir des relations sur les coefficients.

Exercice 11. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

- $\frac{X^5}{1 - X^4}$ sur $\mathbb{R}$;
- $\frac{1}{X^n - 1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) sur $\mathbb{C}$.