

Fonctions convexes

1	Fonctions convexes	2
1.1	Cordes, sécantes	2
1.2	Définition	3
1.3	Inégalité des pentes	4
2	Convexité et dérivabilité	5
2.1	CNS de convexité pour une fonction dérivable . . .	5
2.2	Inégalités de convexité classiques	6

Compétences attendues.

- ✓ Montrer qu'une fonction est convexe ou concave.
- ✓ Connaître et appliquer à bon escient les inégalités des pentes.
- ✓ Obtenir des inégalités de convexité à l'aide des positions relatives courbe/tangente et courbe/corde.

1 Fonctions convexes

Dans tout le chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1.1 Cordes, sécantes

Propriété 1

Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) avec $x_A \neq x_B$. Notons (AB) la droite passant par A et B , et $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B . Alors :

$$\begin{aligned}(AB) &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A \right\} \\ &= \{((1 - \lambda)x_A + \lambda x_B, (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B), \lambda \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

et

$$[A, B] = \{((1 - \lambda)x_A + \lambda x_B, (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B), \lambda \in [0, 1]\}.$$

Remarque. En particulier pour tous réels $a < b$, x appartient à $[a, b]$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $x = (1 - \lambda)a + \lambda b$, et alors $\lambda = \frac{x - a}{b - a}$, rapport de la distance entre a et x avec celle entre a et b .

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, et soient $a, b \in I$ deux points distincts.

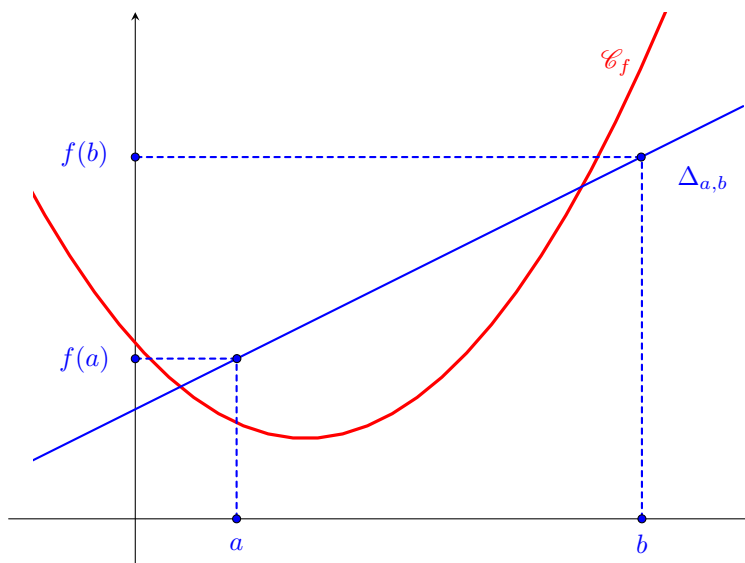
- On appelle *sécante de f passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$* la droite notée $\Delta_{a,b}$ passant par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ du plan, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\begin{aligned}\Delta_{a,b} &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right\} \\ &= \{((1 - \lambda)a + \lambda b, (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)), \lambda \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

- On appelle *corde de f entre a et b* le segment d'extrémités $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\{((1 - \lambda)a + \lambda b, (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)), \lambda \in [0, 1]\}.$$

Représentation graphique.



**Astuce.**

L'équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la sécante passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, on remplace la dérivée $f'(a)$ par le taux d'accroissement $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ce qui donne :

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

1.2 Définition

Définition.

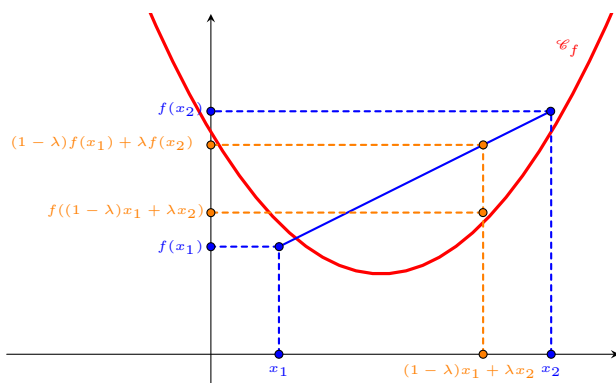
On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est *convexe sur I* si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

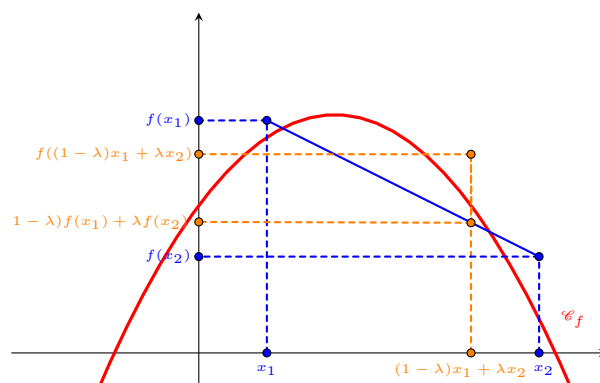
On dit que f est *concave sur I* si $-f$ est convexe sur I , c'est-à-dire si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2) \geq (1 - \lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2).$$

Interprétation graphique.



f est **convexe sur I** si, et seulement si, sa courbe $\mathcal{C}_f$ est **en dessous de ses cordes** sur I .



f est **concave sur I** si, et seulement si, sa courbe $\mathcal{C}_f$ est **au dessus de ses cordes** sur I .

Exemples.

- Une fonction affine est convexe et concave sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est confondue avec ses sécantes.
- La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$ car pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0, 1]$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2| \leq |\lambda| \times |x_1| + |1 - \lambda| \times |x_2| = \lambda|x_1| + (1 - \lambda)|x_2|.$$

Propriété 2 (Position de la courbe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I et $a, b \in I$ avec $a < b$.

La courbe de f est située sous sa sécante sur $[a, b]$ et au-dessus à l'extérieur de $[a, b]$.

Propriété 3 (*Inégalité de Jensen*)

Soit f une fonction convexe sur I . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0, 1]^n$ tel que $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

1.3 Inégalité des pentes**Propriété 4**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $a \in I$, la « fonction pente en a » :

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

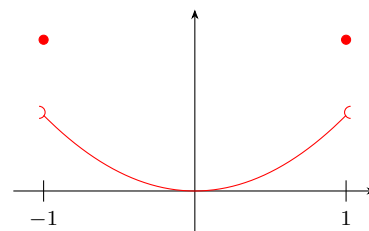
est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Corollaire 5

Si I est un intervalle **ouvert**, alors une fonction convexe sur I est continue sur I .

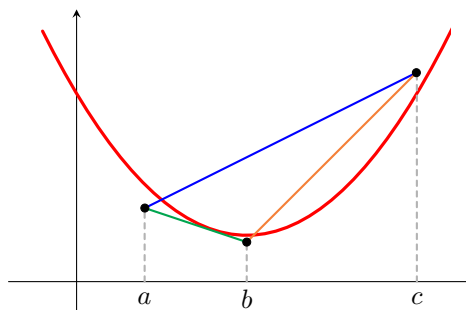
**Mise en garde.**

- Il est essentiel que l'intervalle I soit **ouvert** : par exemple, la fonction smiley ci-contre est convexe sur $[-1, 1]$, mais pas continue en -1 et en 1 .
- On a montré dans la preuve de la propriété précédente qu'une fonction convexe sur un intervalle I ouvert est dérivable à gauche et à droite en tout point de I . Mais elle n'est en général pas dérivable sur I , comme le montre le cas de la fonction valeur absolue.

**Corollaire 6** (*Inégalité des trois pentes*)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors, pour tous a, b, c éléments distincts de I avec $a < b < c$:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{c - b}.$$



2 Convexité et dérivabilité

2.1 CNS de convexité pour une fonction dérivable

Propriété 7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Il y a équivalence entre :

- (1) f est convexe sur I ;
- (2) f' est croissante sur I ;
- (3) $\mathcal{C}_f$ est au dessus de ses tangentes sur I , c'est-à-dire :

$$\forall (a, x) \in I^2, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a).$$

Corollaire 8

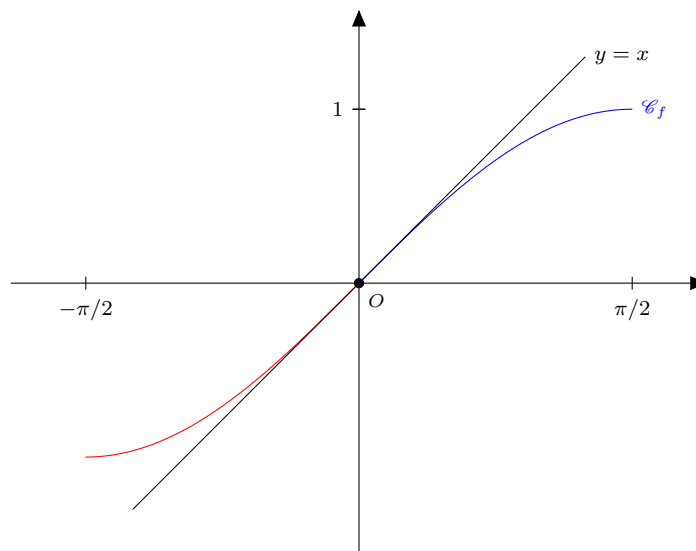
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

Alors f est convexe sur I si, et seulement si, $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

Exemple. Étudions la convexité de la fonction sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ sur cet intervalle, et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (\sin)''(x) = -\sin(x).$$

Puisque $-\sin(x) \leq 0$ sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $-\sin(x) \geq 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$, la fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$. Elle change ainsi de concavité en 0 : on parle de *point d'inflexion de la courbe*.



La courbe du sinus change de concavité en 0 :
elle est convexe sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ (arc représenté en rouge) et concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ (arc en bleu).

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, et soit a un point intérieur à I .

On dit que f possède un *point d'inflexion* en a si f change de concavité en a , c'est-à-dire si f est convexe au voisinage de a à gauche et concave au voisinage de a à droite, ou l'inverse.

Si f est deux fois dérivable sur I , f admet un point d'inflexion en a si, et seulement si, f'' s'annule en a en changeant de signe.

Remarque. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un point d'inflexion en $a \in I$, alors la courbe de f traverse sa tangente en a . En effet, quitte à considérer $-f$ à la place de f , il existe $\eta > 0$ tel que f est concave sur $[a - \eta, a]$ et convexe sur $[a, a + \eta]$. Donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de sa tangente en a sur $[a - \eta, a]$ et au dessus sur $[a, a + \eta]$.

2.2 Inégalités de convexité classiques

Rappel. Convexité et position relative courbe/tangente et courbe/corde.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe (resp. concave) sur un intervalle I , alors :

- sa courbe est en dessous (resp. au dessus) de ses cordes sur I ;
- sa courbe est au dessus (resp. en dessous) de ses tangentes sur I .

Exercice 1. Montrer les inégalités suivantes :

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$;
- (2) $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1 + x) \leq x$;
- (3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exercice 2. Montrer l'inégalité suivante, appelée *inégalité arithmético-géométrique* :

$$\forall x_1, \dots, x_n > 0, \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$