Colle 1.

Question de cours. Propriétés de l'union, de l'intersection et du complémentaire.

Preuve. Résolution de l'équation homogène pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

Exercice 1

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E telles que $A \setminus B = C$.
Montrer que $A \cup B = B \cup C$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}.$$

Exercice 3

On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $E = \mathbb{R}_+$ en posant

$$x\mathscr{R}y \quad \Leftrightarrow \quad \exists (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ kx = ly.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ définit une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un réel positif x.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + y = \cos^2(x) \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{array} \right.$$

Colle 2.

Question de cours. Principe de superposition

Preuve. L'ensemble des classes d'équivalences forme une partition de E.

Exercice 5

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \cup B = A \cap C) \Longleftrightarrow (B \subset A \ \text{ et } \ A \subset C).$$

Exercice 6

On considère l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit E un ensemble ordonné.
Démontrer que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{array} \right.$$

Colle 3.

Question de cours. Définition d'une relation d'équivalence et d'une relation d'ordre.

Preuve. Résolution de l'équation homogène pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (dans $\mathbb{C}$).

Exercice 9

Soient E un ensemble et A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$.
2. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$.
3. Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 10

Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation

$$(t+1)y' + y = (t+1)\sin(t).$$

Exercice 11

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 5y = 5\cos(t)$.
