Colle 1.

Question de cours. Propriétés de l'union, de l'intersection et du complémentaire.

Preuve. Densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Soit A, B et C trois parties d'un ensemble E telles que $A \setminus B = C$.
Montrer que $A \cup B = B \cup C$.

Exercice 2

On considère les applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+y \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,-x) \end{array} \right.$$

1. f est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Déterminer $f \circ g$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $E = \mathbb{R}_+$ en posant

$$x \mathscr{R} y \quad \Leftrightarrow \quad \exists (k,l) \in \mathbb{N}^2,\ kx = ly.$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ définit une relation d'équivalence.
2. Décrire la classe d'équivalence d'un réel x.

Exercice 4

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ croissante. On considère l'ensemble

$$E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}.$$

Montrer que E possède une borne supérieure b, puis que $f(b) = b$.

Colle 2.

Question de cours. Définitions et caractérisations des applications injectives/surjectives/bijectives.

Preuve. Composition et injectivité/surjectivité.

Exercice 5

Soit E un ensemble et A, B, C trois parties de E. Démontrer l'équivalence suivante :

$$(A \cup B = A \cap C) \Longleftrightarrow (B \subset A \ \text{ et } \ A \subset C).$$

Exercice 6

Soient trois applications :

$$f : E \to F,\ g : F \to G \text{ et } h : G \to E$$

Montrer que si, parmi les trois applications $h \circ g \circ f$, $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$, deux sont injectives (resp. surjectives) et une surjective (resp. injective), alors f, g, h sont bijectives.

Exercice 7

Soit E un ensemble ordonné.
Démontrer que toute partie de E admet un élément maximal si et seulement si toute suite croissante de E est stationnaire.

Exercice 8

Déterminer les ensembles

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1, \frac{1}{n}\right],\ J = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[,\ K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [n, n+1].$$

Colle 3.

Question de cours. Définition d'une relation d'équivalence et d'une relation d'ordre.

Preuve. Seconde caractérisation d'une application bijective.

Exercice 9

Soient E un ensemble et A et B deux éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cap B = A$.
2. Montrer que $A \subset B$ si et seulement si $A \cup B = B$.
3. Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si et seulement si $A = B$.

Exercice 10

On considère les applications $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x,y,z) = (x+y, z, y-z),$$
$$g(x,y,z) = (x-y-z, y+z, y).$$

Montrer que f est bijective et que $f^{-1} = g$.

Exercice 11

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x \mathscr{R} y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$.

Exercice 12

Montrer que tout intervalle non vide $]x, y[$ contient un rationnel de la forme $\dfrac{p}{2^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
