Colle 1.

Question de cours. Définitions et caractérisations des applications injectives/surjectives/bijectives.

Preuve. Unicité de la limite.

Exercice 1

Calculer si elles existent, les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n+4}$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{(n+k)^2}$

Exercice 2

On considère les applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2x+y \end{array} \right. \qquad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & (x,-x) \end{array} \right.$$

1. f est-elle injective ? g est-elle surjective ?
2. Déterminer $f\circ g$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3

Pour tout entier $n\geq 1$, on considère $f_n(x)=x^n+9x^2-4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ n'admet qu'une seule solution positive, notée u_n.
2. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\in]0,\frac{2}{3}[$.
3. Étudier la monotonie puis prouver la convergence de la suite (u_n).
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4

Soit $f:[0,1]\to[0,1]$ croissante. On considère l'ensemble

$$E=\{x\in[0,1] \mid f(x)\geq x\}.$$

Montrer que E possède une borne supérieure b, puis que $f(b)=b$.

Colle 2.

Question de cours. Définitions d'une suite convergente et d'une suite divergente vers $\pm\infty$.

Preuve. Théorème des suites monotones.

Exercice 5

Calculer si elles existent, les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Exercice 6

Soient trois applications :

$$f:E\to F,\ g:F\to G \text{ et } h:G\to E$$

Montrer que si, parmi les trois applications $h\circ g\circ f$, $g\circ f\circ h$ et $f\circ h\circ g$, deux sont injectives (resp. surjectives) et une surjective (resp. injective), alors f,g,h sont bijectives.

Exercice 7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0=1$, $v_0=2$ et par les relations :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{u_n^2}{u_n+v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1}=\frac{v_n^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et que $0<u_n<v_n$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire qu'elles convergent et calculer leurs limites respectives.

Exercice 8

Déterminer les ensembles

$$I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\left[-1,\frac{1}{n}\right],\ J=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[,\ K=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[n,n+1].$$

Colle 3.

Question de cours. Définition et théorème des suites adjacentes.

Preuve. Seconde caractérisation d'une application bijective.

Exercice 9

Calculer si elles existent, les limites suivantes :

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)}{\sqrt{n+2}}$ (2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/n}$

Exercice 10

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n=1$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1$.

Exercice 11

On considère les applications $f,g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définies par

$$f(x,y,z)=(x+y,z,y-z),$$
$$g(x,y,z)=(x-y-z,y+z,y).$$

Montrer que f est bijective et que $f^{-1}=g$.

Exercice 12

Soit n un entier ≥ 3 et $f_n(x)=x-n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0<u_n<n<v_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$?
3. (a) Montrer que : $\forall n\geq 3,\ 1<u_n<e$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).
   (c) A l'aide d'un encadrement, montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
