Colle 1.

Question de cours. Suites extraites : définition et propriétés.

Preuve. Unicité de la limite.

Exercice 1

Calculer si elles existent, les limites suivantes :

(1) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}-\sqrt{n+4}$ (2) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{(n+k)^2}$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=2u_n+3^n$.

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n=\frac{u_n}{3^n}$ est une suite arithmético-géométrique.
2. En déduire v_n puis de u_n en fonction de n.

Exercice 3

Pour tout entier $n\geq 1$, on considère $f_n(x)=x^n+9x^2-4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ n'admet qu'une seule solution positive, notée u_n.
2. Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\in]0,\frac{2}{3}[$.
3. Étudier la monotonie puis prouver la convergence de la suite (u_n).
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $\lim_{n\to+\infty} u_nv_n=1$.
Montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} v_n=1$.

Colle 2.

Question de cours. Définitions d'une suite convergente et d'une suite divergente vers $\pm\infty$.

Preuve. Théorème des suites monotones.

Exercice 5

Calculer si elles existent, les limites suivantes :

(1) $\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n^2+2n+3}{n+1}\pi\right)$ (2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Exercice 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0=1$, $v_0=2$ et par les relations :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{u_n^2}{u_n+v_n}\quad\text{et}\quad v_{n+1}=\frac{v_n^2}{u_n+v_n}.$$

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n et v_n sont bien définis et que $0<u_n<v_n$.
2. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire qu'elles convergent et calculer leurs limites respectives.

Exercice 7

Pour tout $n\geq 3$, on pose $f_n(x)=x^n+x^2+2x-1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution positive x_n. Vérifier que $x_n\in[0,\frac{1}{2}]$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$.
   En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
3. En déduire qu'elle converge vers une limite qu'on notera ℓ.
4. Déterminer la valeur de ℓ.

Colle 3.

Question de cours. Définition et théorème des suites adjacentes.

Preuve. Théorème des suites adjacentes.

Exercice 8

Calculer si elles existent, les limites suivantes :

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(n+1)}{\sqrt{n+2}}$ (2) $\lim_{n\to+\infty} n^{1/n}$

Exercice 9

On considère les deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0=1,\ y_0=9\ \text{ et }\ \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} x_{n+1}=6x_n-y_n\\ y_{n+1}=5x_n\end{cases}$$

1. Montrer que la suite (x_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire une expression de x_n, puis de y_n, en fonction de n.

Exercice 10

Soit n un entier ≥ 3 et $f_n(x)=x-n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0<u_n<n<v_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$?
3. (a) Montrer que : $\forall n\geq 3$, $1<u_n<e$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).
   (c) A l'aide d'un encadrement, montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
