Colle 1.

Question de cours. Suites extraites : définition et propriétés.

Preuve. Propriétés sur les cardinaux.

Exercice 1

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}; \qquad \lim_{x\to 0} x\sin(\ln(x)).$$

Exercice 2

Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2+1}.$$

Exercice 3

Pour tout $n \geq 3$, on pose $f_n(x) = x^n + x^2 + 2x - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution positive x_n. Vérifier que $x_n \in [0, \frac{1}{2}]$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
   En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geq 3}$.
3. En déduire qu'elle converge vers une limite qu'on notera ℓ.
4. Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 4

5 cartes d'un jeu de 32 cartes constituent la main d'un joueur.

1. Combien de mains comportent un As ?
2. Combien de mains comportent au moins un As ?
3. Combien de mains comportent un As et un Coeur ?
4. Combien de mains comportent un As ou un Coeur ?
5. Combien de mains comportent au moins un As et au moins un Coeur ?

Colle 2.

Question de cours. Définitions de $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

Preuve. Théorème de Bolzano - Weierstrass.

Exercice 5

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}; \qquad \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}.$$

Exercice 6

Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

Exercice 7

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet qu'une seule solution positive, notée u_n.
2. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \frac{2}{3}[$.
3. Étudier la monotonie puis prouver la convergence de la suite (u_n).
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8

Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2p}), (u_{2p+1}) et (u_{q^2}) convergent.

Montrer que (u_n) converge.

Colle 3.

Question de cours. Formules sur les cardinaux.

Preuve. Caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 9

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}}; \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2 + x\sin(x)).$$

Exercice 10

Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}.$$

Exercice 11

Soit n un entier ≥ 3 et $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions u_n et v_n vérifiant : $0 < u_n < n < v_n$.
2. Quelle est la nature de la suite $(v_n)_{n\geq 3}$?
3. (a) Montrer que : $\forall n \geq 3,\ 1 < u_n < e$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).
   (c) A l'aide d'un encadrement, montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 12

Donner dans chaque cas un exemple de suite :

1. ni minorée, ni majorée ;
2. minorée, non majorée et qui ne tend pas vers $+\infty$;
3. positive qui tend vers 0 sans être décroissante.
