

Colle 1.

Question de cours. Séries géométriques, exponentielle et de Riemann.

Preuve. Théorème du rang.

Exercice 1

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(1), P'(1), P(0)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f . Que peut-on en déduire ?
3. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 2

1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$(1) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (2) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{2^n}$$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n \geq 0} (\sqrt{n^2 + n} - n) \quad (2) \sum_{n \geq 1} \frac{e^{1/n}}{n}$$

Exercice 3

Soient p et q deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Déterminer $\text{Im}(r)$ et $\text{Ker}(r)$.

Colle 2.

Question de cours. Définitions et propriétés des projecteurs.

Preuve. Image d'une famille libre/génératrice/base par une application linéaire injective/surjective/bijective.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = AMA.$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que, si A est inversible, alors f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer f^{-1} .
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(a) Déterminer le noyau de f .
(b) Déterminer l'image de f .

Exercice 5

1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$(1) \sum_{n \geq 0} \frac{n + 2^n}{3^n} \quad (2) \sum_{n \geq 0} \frac{n + 1}{n!}$$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \quad (2) \sum_{n \geq 0} \ln \left(\frac{n^2 + 3}{n^2 + 1} \right)$$

Exercice 6

Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f , g et h ont même noyau et même image.
2. Montrer que $f^5 = f$.
3. En déduire que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Colle 3.

Question de cours. Définitions et propriétés des symétries.

Preuve. Critère spécial des séries alternées.

Exercice 7

Soit f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f .
3. f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 8

1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$(1) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \quad (2) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!}$$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n \geq 0} \frac{n + 1}{n + 2} \quad (2) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

Exercice 9

On considère les sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 suivants :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans \mathbb{R}^2 .
2. Donner l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G .
3. Donner l'expression analytique de la symétrie par rapport à F parallèlement à G .