Complément 2

Méthodes pour l'étude de suites particulières

Étude d'une suite implicite

Une *suite implicite* est une suite (u_n) de réels dont chaque terme u_n est solution d'une équation du type :

$$f_n(x) = 0 \qquad (E_n)$$

où $f_n : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dépendante de $n \in \mathbb{N}$. Il n'est en général pas possible de résoudre explicitement l'équation (E_n). On ne connait donc pas en général la valeur de u_n. On dit que ces termes sont définis implicitement.

L'étude de suites implicites est fréquente aux concours. Il est donc important d'avoir en tête les méthodes pour y parvenir.

Existence et unicité du terme général

Pour justifier l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (E_n), on pensera à utiliser le théorème de la bijection dont on rappelle l'énoncé.

Théorème 1 (*de la bijection*)

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

- $J = f(I)$ est un intervalle, et f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$;
- son application réciproque f^{-1} est elle-même **continue** sur J, **strictement monotone** et de **même sens de variation** que f.

En deux étapes bien distinctes :

- on démontre avec le théorème de la bijection que f_n est une bijection de I dans un intervalle $J = f(I)$ qu'on détermine ;
- on justifie que $0 \in J$ et donc que 0 admet un unique antécédent u_n dans I par f_n.

On a ainsi prouvé l'existence et l'unicité d'une solution u_n de (E_n).

Monotonie et convergence de (u_n)

Afin d'étudier la monotonie de (u_n), on pourra :

- comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les réels $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$;
- en déduire une inégalité entre u_{n+1} et u_n à l'aide de la stricte monotonie de f_{n+1}.

Selon le sens de variation de la suite (u_n), on cherche si elle est ou non majorée ou minorée, et selon les cas, elle sera soit convergente, soit divergente vers $\pm\infty$.

Limite et équivalent de (u_n)

Pour déterminer la limite de (u_n), ou obtenir un équivalent ou un développement asymptotique, on pensera à utiliser l'équation (E_n) définissant le terme u_n :

$$f_n(u_n) = 0.$$

Étude d'une suite récurrente d'ordre 1

On considère à présent une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où f est une fonction définie sur un intervalle I. Bien que les exercices seront souvent détaillés, il est utile de connaitre les différentes situations que l'on peut rencontrer, et de savoir comment mener l'étude d'une telle suite selon les cas.

Représentation graphique

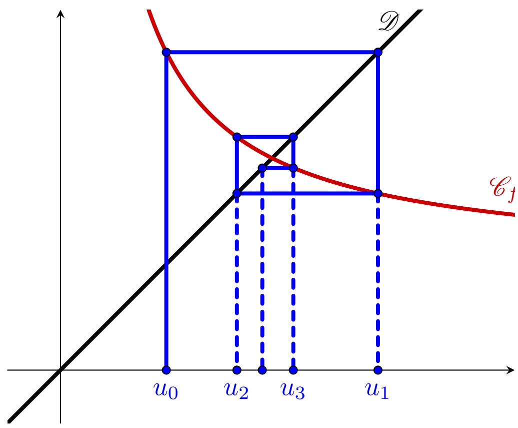
Afin d'avoir une idée du comportement de la suite, ce qui est très utile pour ensuite mener son étude, on commencera par visualiser graphiquement ses premiers termes. Pour cela :

(i) on étudie les variations de la fonction f, puis on trace sur un même graphe sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$;

(ii) on place u_0 sur l'axe des abscisses ;

(iii) à l'aide de la courbe de f, on place $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées ;

(iv) grâce à la droite $\mathscr{D}$, on replace u_1 sur l'axe des abscisses, puis on réitère le processus sur u_1 ...



Existence et encadrement des termes

Mise en garde.

Une définition par récurrence n'assure pas l'existence de la suite. En effet, les termes de la suite peuvent sortir du domaine de définition de f.

Considérons par exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(u_n).$$

Elle n'est bien définie que pour ses trois premiers termes car $u_1 = \ln(2) \simeq 0,69$, $u_2 = \ln(\ln(2)) \simeq -0,36$, et donc u_3 n'existe pas puisque u_2 est sorti du domaine de définition du logarithme.

Pour assurer l'existence de tous les termes de la suite, on choisit u_0 dans un *intervalle stable* de f.

Définition.

On dit qu'un intervalle $J \subset I$ est *stable par* f si $f(J) \subset J$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in J,\ f(x) \in J.$$

Si J est un intervalle stable par f et si u_0 appartient à J, on montre par récurrence immédiate (à rédiger si demandé) que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et u_n appartient à J.

Si de plus J est majorée, minorée ou bornée, il en sera de même pour la suite (u_n).

Monotonie de la suite

Deux cas sont à distinguer selon la monotonie de f.

- *Si la fonction f est* ***croissante*** *sur un intervalle stable J :*

  La suite (u_n) est monotone, de monotonie donnée par le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$. En effet :

  – si $u_1 \leq u_0$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n (par récurrence en composant par f) et la suite est décroissante ;

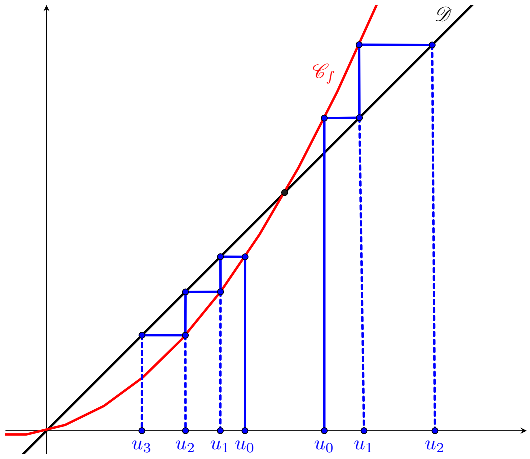
  – de même, si $u_1 \geq u_0$, alors la suite est croissante.

  On pourra introduire la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ et en dresser son tableau de signe afin d'obtenir le signe de $u_1 - u_0$.

Mise en garde.

Si la fonction f est croissante sur J, la suite (u_n) ne l'est pas forcément : elle peut être croissante **ou** décroissante.

On peut par exemple le constater sur l'exemple ci-dessous : la suite (u_n) est décroissante si $u_0 \in]0,6[$, croissante si $u_0 \in]6,+\infty[$, et constante si $u_0 = 6$.



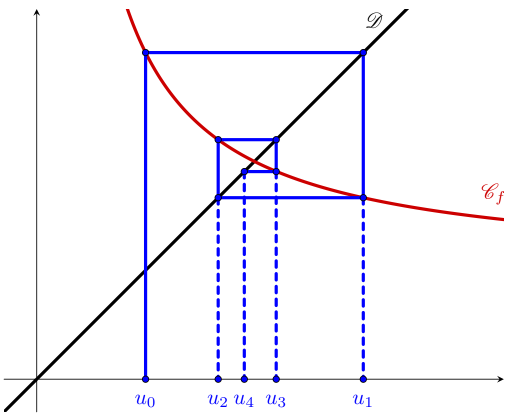
- *Si la fonction f est* ***décroissante*** *sur un intervalle stable J :*

  Dans ce cas, la suite (u_n) n'est plus monotone.

  En revanche, la fonction $f \circ f$ étant croissante de J dans J, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) définies par les relations de récurrence

  $$u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n}) \text{ et } u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$$

  sont monotones. Et elles sont de monotonies contraires puisque si par exemple $u_{2n+2} \leq u_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{2n+3} \geq u_{2n+1}$ par composition par f décroissante.



Limites finies possibles

Définition.

On appelle *point fixe de f* toute solution de l'équation $f(x) = x$.
Graphiquement, il s'agit de l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec la droite $\mathscr{D} : y = x$.

Supposons f **continue** sur I et que la suite (u_n) converge vers une limite **finie** ℓ. En passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$. D'où le :

Théorème 2

Supposons f **continue** sur un intervalle stable I.
Si la suite (u_n) converge dans I, c'est nécessairement vers un point fixe de f.

Pour déterminer les limites finies **possibles** de la suite (u_n), on pourra chercher les points fixes de f, qui sont aussi les points d'annulation de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ sur J

Convergence de la suite

- *Cas où f est croissante.*

  Lorsque f est croissante, la suite (u_n) est monotone et on pourra donc appliquer le théorème des suites monotones :

  – soit pour montrer la convergence de (u_n) (nécessairement vers un point fixe de f) ;
  – soit pour montrer la divergence de (u_n) vers l'infini (en faisant généralement un raisonnement par l'absurde).

- *Cas où f est décroissante.*

  Lorsque f est décroissante, on pourra étudier la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Notons que :

  – si (u_{2n}) ou (u_{2n+1}) convergent, c'est nécessairement vers un point fixe de $f \circ f$. Notons au passage que si ℓ est un point fixe de f, alors ℓ est un point fixe de $f \circ f$, ce qui peut faciliter leur recherche.
  – si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent **vers une même limite** ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

- *Cas où f est contractante.*

  Supposons f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle J stable par f avec f' bornée par $k \in [0, 1[$. Alors[1] pour tout $a, b \in J$:

  $$|f(b) - f(a)| = \left| \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_a^b k\,\mathrm{d}t \right| = k|b - a|.$$

  Dans cette situation, si f admet un point fixe ℓ, celui-ci est unique et c'est la limite de (u_n) :

  – pour l'unicité, supposons que ℓ_1 et ℓ_2 soient des points fixes de f, alors :

  $$|\ell_2 - \ell_1| = |f(\ell_2) - f(\ell_1)| \leq k|\ell_2 - \ell_1|.$$

  Si $\ell_1 \neq \ell_2$, on obtient en simplifiant par $|\ell_2 - \ell_1| > 0$ que $1 \leq k$, ce qui est contradictoire.
  – si f admet un point fixe ℓ dans J, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|.$$

  On en déduit par récurrence $|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|$, d'où $\lim u_n = \ell$ par théorème d'encadrement.

[1] L'inégalité ainsi obtenue pourra se déduire de l'inégalité des accroissements finis lorsque celle-ci aura été établie.

Exercices

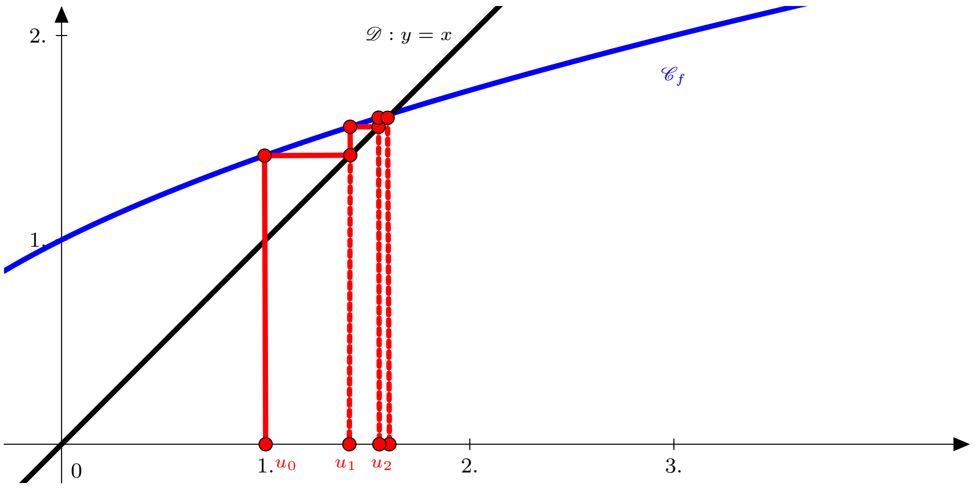
Exercice 1

Dans cet exercice, on étudie la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}.$$

1. Soit $f : [1,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   Étudier les variations de f, puis représenter sur un même graphique la courbe représentative de f, la droite $y = x$, ainsi que les quatre premiers termes de la suite (u_n).
2. Étude de la suite (u_n).
   (a) Montrer que $[1,2]$ est un intervalle stable pour f, c'est-à-dire $f([1,2]) \subset [1,2]$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1,2]$. On note α cette solution qu'on n'essaiera pas de déterminer.
   (d) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
   (e) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
3. Approximation de α.
   (a) Montrer que pour tous $x, y \in [1,2]$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$.
   (d) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

1. La fonction f est définie et continue sur le segment $[1,2]$. Elle est de plus dérivable sur $[1,2]$, de dérivée :
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$
   On en déduit que f est croissante sur $[1,2]$. On trace sa représentation graphique (on utilise que $f(1) = \sqrt{2}$, $f(2) = \sqrt{3}$) :



2. Étude de la suite u.
   (a) On a vu que f est continue, croissante, et que $f(1) = \sqrt{2}$, $f(2) = \sqrt{3}$. Ainsi pour tout $1 \leq x \leq 2$, on a :
$$1 \leq f(1) = \sqrt{2} \leq f(x) \leq f(2) = \sqrt{3} \leq 2.$$

On en déduit que $[1,2]$ est un intervalle stable pour f, c'est-à-dire $f([1,2]) \subset [1,2]$.

(b) Montrons par récurrence que la suite u est bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.

I $u_0 = 1$ est bien défini et appartient au segment $[1,2]$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n+1$. Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et appartient à $[1,2]$. Puisque f est définie sur $[1,2]$, on en déduit que le terme $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini. De plus le segment $[1,2]$ étant stable par f et $u_n \in [1,2]$, on a $u_{n+1} \in [1,2]$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, la suite u est donc bien définie et que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.

(c)

Idée.

Une telle question devrait immédiatement vous faire penser au théorème de la bijection. Seule difficulté ici, le théorème de la bijection ne peut s'appliquer à f directement pour obtenir une solution de l'équation $f(x) = x$, mais à $g : x \mapsto f(x) - x$. On cherchera donc à montrer qu'il existe une unique solution à l'équation $g(x) = 0$.

Appliquons le théorème de la bijection à g.

- $g : x \mapsto f(x) - x$ est une **fonction continue sur** $[1,2]$ comme différence de deux fonctions qui le sont.
- Montrons que g est **strictement monotone sur** $[1,2]$. g est différence de deux fonctions dérivables sur $[1,2]$. Elle est donc dérivable, et on a pour tout $x \in [1,2]$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}}.$$

  On a $g'(x) < 0$ pour tout $x \in [1,2]$ car $1 - 2\sqrt{1+x} < 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur cet intervalle.
- Enfin $g(1) = \sqrt{2} - 1 > 0$ et $g(2) = \sqrt{3} - 2 < 0$, donc 0 **appartient à l'intervalle image** $g([1,2])$.

On déduit de ces trois points et du théorème de la bijection que l'équation $g(x) = 0$ (ou $f(x) = x$) admet une unique solution sur l'intervalle $[1,2]$. On note α cette solution.

(d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

I $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n+1$. On a par hypothèse de récurrence, $2 \geq u_{n+1} \geq u_n \geq 1$. f étant croissante sur $[1,2]$, on en déduit que :

$$f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \quad \text{soit encore} \quad u_{n+2} \geq u_{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a donc montré que la suite u est croissante.

(e) La suite u est croissante et majorée par 2. Elle converge donc vers une limite finie $\ell \in [1,2]$. De plus cette limite est nécessairement un point fixe de f. En effet on a :

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Puisque f est continue, on obtient en passant à la limite quand $n \to +\infty$:

$$\ell = f(\ell).$$

Or cette équation, on l'a vu, admet une unique solution sur $[1,2]$ qui est α. On peut donc conclure que u converge vers α.

3. Approximation de α.

(a)

Idée.

Une telle inégalité devrait vous faire immédiatement penser à l'inégalité des accroissements finis. On l'applique donc ici.

La fonction f est continue sur $[1,2]$, dérivable sur $]1,2[$, et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

Pour tout $x \in]1,2[$, on a :

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, on peut donc conclure que :

$$\forall (x,y) \in [1,2], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|x-y|.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique l'inégalité précédente avec $x = u_n$ et $y = \alpha$:

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|$$

ce qui donne, puisque $\alpha = f(\alpha)$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|.$$

(c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

I On a bien $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0 |u_0 - \alpha|$. D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n. Montrons la propriété au rang $n+1$. Par l'inégalité de la question précédente, on a :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|u_n - \alpha|,$$

et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

on obtient bien que :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|.$$

D'où la propriété au rang $n+1$.

Par principe de récurrence, on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Reste à remarquer que $|u_0 - \alpha| = \alpha - 1 \leq 2 - 1 = 1$, d'où finalement :

$$n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n.$$

(d) On cherche n tel que :
$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n \leq 10^{-3} \text{ soit } 10^3 \leq (2\sqrt{2})^n.$$
Prenons le logarithme de cette expression (ln est croissant) :
$$3\ln(10) \leq n\ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\ln(2)n.$$
Ainsi on a $n \geq \dfrac{2\ln(10)}{\ln(2)} \approx 6,64$.. u_7 est donc une approximation de α à 10^{-3} près. Avec un programme informatique simple, on obtient $\alpha \approx u_7 = 1.6178513$.

Exercice 2

On étudie la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{5}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{1+u_n} \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n > 0$.
2. Calculer les premiers termes de la suite. Est-elle monotone ?
3. Étudier la fonction $f(x) = 1 + \dfrac{4}{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Représenter f et les premiers termes de la suite.
4. Déterminer les limites possibles de la suite (u_n).
5. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   (a) Déterminer la fonction g telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$.
   (b) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}_+$ et déterminer le signe de $g(x) - x$.
   Montrer que les deux intervalles $[0, \sqrt{5}[$ et $[\sqrt{5}, +\infty[$ sont stables par g.
   (c) En déduire que les deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes. Vers quelle limite ?
   (d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "u_n est bien définie et $u_n > 0$". Montrons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\text{I}}$ $u_0 = \dfrac{5}{2} > 0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   $\boxed{\text{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons $\mathscr{P}(n+1)$.
   Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc $1 + u_n \neq 0$ donc u_{n+1} est bien défini. Et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{4}{1+u_n} > 0$. Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Par récurrence, u_n est bien défini et $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $u_1 = \dfrac{15}{7} = \dfrac{30}{14} < u_0 = \dfrac{5}{2} = \dfrac{35}{14}$.
   $u_2 = \dfrac{43}{15} = \dfrac{86}{30} > u_0 = \dfrac{5}{2} = \dfrac{75}{30}$.
   Donc $u_1 < u_0 < u_2$ et la suite (u_n) n'est pas monotone.

3. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:
$$f'(x) = 4 \times \frac{-1}{(1+x)^2} = -\frac{4}{(1+x)^2} < 0.$$
   Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 5$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 + 0 = 1$ donc :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	5	$\searrow$	1

4. Supposons que la suite (u_n) converge vers une limite finie ℓ. Comme f est continue, ℓ est un point fixe de f. On résout donc :

$$f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{1+x} = x \Leftrightarrow \frac{1+x+4-x(1-x)}{1+x} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5 - x^2 = 0 \\ x \neq -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

Comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell \geq 0$. Donc $\ell = \sqrt{5}$. Ainsi, la seule limite finie possible de la suite (u_n) est $\sqrt{5}$.

5. (a) On exprime v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de v_n et w_n :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = f(f(u_{2n})) = f \circ f(v_n) \\ w_{n+1} & = & u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f(f(u_{2n+1})) = f \circ f(w_n). \end{array}$$

La fonction g est donc définie par :

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & f \circ f(x) = f(f(x)) = 1 + \dfrac{4}{1+f(x)} = 1 + \dfrac{4}{1 + 1 + \dfrac{4}{1+x}} \\ & = & 1 + \dfrac{4}{\dfrac{2(1+x)+4}{1+x}} = 1 + \dfrac{4(1+x)}{2(1+x)+4} = 1 + \dfrac{2(1+x)}{3+x}. \end{array}$$

(b) g est dérivable car c'est une fonction rationnelle et :

$$g'(x) = \frac{2(3+x) - 2(1+x)}{(3+x)^2} = \frac{4}{(3+x)^2} > 0.$$

On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On cherche ensuite le signe de $g(x) - x$:

$$g(x) - x = 1 + \frac{2(1+x)}{3+x} - x = \frac{3 + x + 2 + 2x - 3x - x^2}{3+x} = \frac{5 - x^2}{3+x} = \frac{(\sqrt{5} - x)(\sqrt{5} + x)}{3+x}.$$

Or sur $\mathbb{R}_+$, on obtient immédiatement $3 + x > 0$ et $\sqrt{5} + x > 0$, donc $g(x) - x$ est du signe de $\sqrt{5} - x$:

x	0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g(x)$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$	3
$g(x) - x$		$+$	0	$-$	

Enfin, g est continue et strictement croissante sur $[0,\sqrt{5}]$ et sur $[\sqrt{5},+\infty[$ donc :

$$g([0,\sqrt{5}]) = [g(0), g(\sqrt{5})] = [\frac{5}{3};\sqrt{5}] \subset [0,\sqrt{5}]$$

et

$$g([\sqrt{5},+\infty[) = \left[g(\sqrt{5}), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [\sqrt{5},3[\subset [\sqrt{5},+\infty[$$

donc les intervalles $[0,\sqrt{5}]$ et $[\sqrt{5},+\infty[$ sont bien stables par g.

(c) La suite (v_n) vérifie $v_0 = u_0 = \frac{5}{2}$. Comparons le à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} > \frac{20}{4} = 5$$

donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ strictement croissante, $\frac{5}{2} > \sqrt{5}$.

Comme l'intervalle $[\sqrt{5},+\infty[$ est stable par g, on montre alors par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n \geq \sqrt{5}$. On en déduit alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = g(v_n) - v_n \leq 0$$

d'après la question 5.(b). La suite (v_n) est donc décroissante et minorée par $\sqrt{5}$ donc converge. Or le seul point fixe de g sur $[\sqrt{5},+\infty[$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de $g(x)-x=0$ obtenues à la question 5.(b) dans le tableau de signe de $g(x)-x$) donc (v_n) converge vers $\sqrt{5}$.

D'autre part, on a vu que $w_0 = u_1 = \frac{15}{7}$, qu'on compare à $\sqrt{5}$:

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{225}{49} < 5 = \frac{49\times 5}{49} = \frac{245}{49}$$

donc, comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, $0 < \frac{15}{7} < \sqrt{5}$.

Comme l'intervalle $[0,\sqrt{5}]$ est stable par g, on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq w_n \leq \sqrt{5}$. On en déduit alors que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$w_{n+1} - w_n = g(w_n) - w_n \geq 0$$

d'après la question 5.(b). La suite (w_n) est donc croissante et majorée par $\sqrt{5}$ donc converge. Or le seul point fixe de g sur $[0,\sqrt{5}]$ est $\sqrt{5}$ (les points fixes sont les solutions de $g(x)-x=0$ obtenues à la question 5.(b) dans le tableau de signe de $g(x)-x$) donc (w_n) converge vers $\sqrt{5}$.

(d) Comme les suites (u_{2n}) (termes pairs de la suite (u_n)) et (u_{2n+1}) (termes impairs de la suite (u_n)) convergent vers la même limite, on en déduit que la suite (u_n) converge vers cette limite. Donc (u_n) converge vers $\sqrt{5}$.