

A rendre le 03/03/26

Partie I : Théorème de Lagrange.

1. Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G .

- Pour tout $g \in G$, $g^{-1}g = e \in H$, donc $g \sim g$: $\sim$ est réflexive.
- Soient $(g, g') \in G^2$ tels que $g \sim g'$. Alors $g^{-1}g' \in H$ et donc $(g^{-1}g')^{-1} = g'^{-1}g \in H$ (car H stable par passage à l'inverse en tant que sous-groupe). Et donc $g' \sim g$, de sorte que $\sim$ est symétrique.
- Soient g_1, g_2, g_3 trois éléments de G tels que $g_1 \sim g_2$ et $g_2 \sim g_3$. Alors $g_1^{-1}g_2 \in H$ et $g_2^{-1}g_3 \in H$. Et donc $g_1^{-1}g_2g_2^{-1}g_3 = g_1^{-1}g_3$ appartient à H (car H stable par produit). Par conséquent, $g_1 \sim g_3$, donc $\sim$ est transitive.

Comme annoncé, $\sim$ est une relation d'équivalence sur G .

2. Soit $g \in G$. Pour tout $g' \in G$:

$$g \sim g' \Leftrightarrow g^{-1}g' \in H \Leftrightarrow \exists h \in H, g^{-1}g' = h \Leftrightarrow \exists h \in H, g' = gh \Leftrightarrow g' \in gH.$$

Et donc la classe d'équivalence de g est gH .

3. Soit $g \in G$. Alors l'application $\varphi_g : \begin{matrix} H & \longrightarrow & gH \\ h & \longmapsto & gh \end{matrix}$ est surjective par définition de gH . Elle est injective car si $gh_1 = gh_2$, alors $h_1 = h_2$.

Donc φ_g est une bijection de H sur gH , qui ont donc le même cardinal.

4. Nous savons que les classes d'équivalence de $\sim$ forment une partition de G . Notons n le nombre de classes d'équivalence distinctes, et soient $E_1, \dots, E_n$ les différentes classes d'équivalence, de sorte que :

$$G = \bigcup_{i=1}^n E_i \text{ et } E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j.$$

Alors, le cardinal de G est égal à la somme des cardinaux des E_i . Or, chacun des E_i a même cardinal que G , donc $\text{Card}(G) = n \text{ Card}(H)$. Ainsi, l'ordre de H divise bien l'ordre de G .

Partie II : Ordre d'un élément.

5. Puisque G est fini, le sous-ensemble $\{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ de G l'est aussi, et il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $k_1 < k_2$ et $g^{k_1} = g^{k_2}$. Mais alors $k = k_2 - k_1 \in \mathbb{N}^*$ et satisfait $g^k = g^{k_2-k_1} = g^{k_2} * g^{-k_1} = e$.

L'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid g^k = e\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}^*$: elle admet un plus petit élément, qu'on appelle l'ordre de g , et qu'on notera $o(g)$.

6. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$\Leftarrow$ Si $o(g)$ divise k , il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $k = uo(g)$. Alors :

$$g^k = g^{uo(g)} \underbrace{=}_{\text{assoc. de } *} (g^{o(g)})^u = e^u = e.$$

$\Rightarrow$ Supposons que $g^k = e$, et notons q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de k par $o(g)$, de sorte que :

$$k = qo(g) + r \text{ avec } 0 \leq r < k.$$

Calculons :

$$e = g^k = g^{qo(g)+r} = \underbrace{(g^{o(g)})^q}_{\text{assoc. de } *} * g^r = e^q * g^r = g^r.$$

Par minimalité de l'entier k , $r = 0$ et $k = qo(g)$ est un multiple de $o(g)$.

Ainsi, $\boxed{g^k = e \text{ si, et seulement si, } o(g) \text{ divise } k.}$

7. L'inclusion $\{g^k, k \in \llbracket 0, o(g) - 1 \rrbracket\} \subset \langle g \rangle$ est immédiate. Pour l'inclusion réciproque, soit $k \in \mathbb{Z}$. En notant q et r le quotient et le reste de k par $o(g)$, on obtient $g^k = g^r$ en reprenant les calculs effectués dans la question précédente. D'où le résultat puisque $r \in \llbracket 0, o(g) - 1 \rrbracket$.

Ainsi, $\boxed{\langle g \rangle = \{g^k, k \in \llbracket 0, o(g) - 1 \rrbracket\}.}$

Remarque. Notons de plus que les éléments de $\{g^k, k \in \llbracket 0, o(g) - 1 \rrbracket\}$ sont deux à deux distincts. En effet, si $k_1, k_2 \in \llbracket 0, o(g) - 1 \rrbracket$ sont tels que $g^{k_1} = g^{k_2}$, alors $g^{k_2-k_1} = e$. Par la question précédente, $o(g)$ divise $k_2 - k_1 \in \llbracket -o(g) + 1, o(g) - 1 \rrbracket$, ce qui impose $k_2 - k_1 = 0$, et donc $k_1 = k_2$.

8. Montrons que φ est bien définie. Soient pour cela k, k' tels que $\zeta^k = \zeta^{k'}$. Alors $e^{\frac{2ik\pi}{p}} = e^{\frac{2ik'\pi}{p}}$, d'où $\frac{2k\pi}{p} \equiv \frac{2k'\pi}{p} [2\pi]$ par propriété de l'exponentielle complexe. Ainsi, $k \equiv k' [p]$ et p divise $k - k'$. Par la question 6, $g^{k-k'} = e$, ce qui se récrit $g^k = g^{k'}$.

L'application $\boxed{\varphi \text{ est donc bien définie.}}$

Montrons que φ est un morphisme de groupes. Soient pour cela $k, k' \in \mathbb{Z}$. Calculons :

$$\varphi(\zeta^k \times \zeta^{k'}) = \varphi(\zeta^{k+k'}) = g^{k+k'} = g^k * g^{k'} = \varphi(\zeta^k) * \varphi(\zeta^{k'}).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un morphisme de groupes de } (\mathbb{U}_p, \times) \text{ sur } (G, *)}.$

Montrons que φ est injective. Soit pour cela $z \in \mathbb{U}_p$ tel que $\varphi(z) = e$. La connaissance de $\mathbb{U}_p$ assure l'existence d'un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \zeta^k$. D'où $e = \varphi(z) = g^k$, et par la question 6, il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $k = up$. Ainsi, $z = \zeta^k = (\zeta^p)^u = 1^u = 1$. Le noyau de φ est donc réduit à l'élément neutre : φ est injective.

Enfin, φ est évidemment surjective, car pour tout $h \in \langle g \rangle$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $h = g^k = \varphi(\zeta^k)$ avec $\zeta^k \in \mathbb{U}_p$.

Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{U}_p \text{ dans } \langle g \rangle}.$

Remarque. Si G est un groupe cyclique d'ordre p , il existe $g \in G$ tel que $G = \langle g \rangle$. Ce qui précède montre que g est d'ordre fini, nécessairement égal à p puisque $\langle g \rangle = \{g^k, k \in \llbracket 0, o(g) - 1 \rrbracket\}$ est de cardinal p . On vient alors de montrer que G est isomorphe à $\mathbb{U}_p$. Ainsi, il existe à isomorphisme près un unique groupe cyclique d'ordre p , et tout groupe cyclique d'ordre p est isomorphe à $(\mathbb{U}_p, \times)$ (ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ puisqu'on a vu en cours que ces deux groupes sont isomorphes).

9. $\langle g \rangle$ est un sous-groupe de G de cardinal (ou d'ordre) $o(g)$. Par le théorème de Lagrange, $\boxed{o(g) \text{ divise } |G|}.$

Par la question 6, on obtient $\boxed{g^{|G|} = e}.$

Remarque. Nous avons obtenu ce résultat en TD dans le cas d'un groupe commutatif fini.

10. Soit p un nombre premier. Alors nous savons que $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$ est un corps. Son groupe des inversible est donc $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ qui est de cardinal $p - 1$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Distinguons deux cas :

- Si p divise x , alors $x \equiv 0 [p]$, et donc $x^p \equiv x [p]$.
- Si p ne divise pas x , alors x et p sont premiers entre eux (car p premier). Par conséquent, $\bar{x}$ appartient à $\mathcal{U}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ (vu en cours). D'après la question précédente, $\bar{x}^{p-1} = \bar{1}$, ce qui se réécrit $x^{p-1} \equiv 1 [p]$. On obtient l'identité voulue en multipliant par x .

Dans tous les cas, on retrouve le petit théorème de Fermat : pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x^p \equiv x [p]$.

Partie III : Réciproque du théorème de Lagrange pour les groupes cycliques.

11. Notons pour commencer que $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est un élément d'ordre n puisque $\zeta^n = 1$ et que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\zeta^k \neq 1$. Par conséquent, $(\zeta^d)^r = \zeta^{rd} = \zeta^n = 1$ et $(\zeta^d)^k = \zeta^{kd} \neq 1$ pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ (car $kd \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$). Ainsi, ζ^d est d'ordre r .

L'ensemble $H = \langle \zeta^d \rangle$ est le sous-groupe de $\mathbb{U}_n$ engendré par ζ^d , d'ordre r car ζ^d est d'ordre r .

12. (a) L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \zeta^k \in H'\}$ est une partie de $\mathbb{N}^*$, non vide car elle contient n (puisque $\zeta^n = 1 \in H'$). Elle admet donc un plus petit élément qu'on notera k .

Montrons que $H' = \langle \zeta^k \rangle$.

$\supset$ Puisque ζ^k appartient à H' et que H' est un groupe, $\langle \zeta^k \rangle$ est inclus dans H' en tant que plus petit sous-groupe contenant ζ^k .

$\subset$ Soit $h \in H'$. Puisque $h \in \mathbb{U}_n$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $h = \zeta^p$. Notons alors $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ le quotient et le reste de la division euclidienne de p par k . Alors, $h = \zeta^p = \zeta^{kq+r} = (\zeta^k)^q \zeta^r$, ce qui se réécrit :

$$\zeta^r = h \times (\zeta^k)^{-q} \in H'$$

car $h, \zeta^k \in H'$. Mais par minimalité de k , cela impose que $r = 0$, et donc que $p = kq$. Par conséquent, $h = \zeta^{kq} = (\zeta^k)^q$ appartient à $\langle \zeta^k \rangle$.

Ainsi, $H' = \langle \zeta^k \rangle$.

- (b) Puisque H' est d'ordre r et que ζ^k appartient à H' , il suit que $\zeta^{kr} = (\zeta^k)^r = 1$ par la question 9. Par la question 6, $o(\zeta) = n$ divise kr . Il existe donc $u \in \mathbb{Z}$ tel que $kr = un = udr$, d'où $k = ud$ (puisque $r \neq 0$). Ainsi, d divise k .

En conservant les notations introduites, $\zeta^k = (\zeta^d)^u \in H$ qui est un sous-groupe, donc $H' = \langle \zeta^k \rangle \subset H$. Enfin, puisque H et H' sont des ensembles finis de même cardinal r , $H = H'$.

Résumons :

- on a montré que si r est un diviseur de n , l'ordre du groupe $\mathbb{U}_n$, alors $\mathbb{U}_n$ admet un sous-groupe H d'ordre r . De plus, ce sous-groupe est unique, c'est le sous-groupe engendré par ζ^d avec $d = \frac{n}{r}$.
- Puisque tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{U}_n$, ce résultat vaut aussi tous les groupes cycliques.

Ainsi, la réciproque du théorème de Lagrange est vraie **pour les groupes cycliques**.



Mise en garde.

La réciproque du théorème de Lagrange est fautive en général : le premier contre-exemple pourra être donné lorsqu'on aura étudié plus précisément le groupe symétrique. Le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ est d'ordre 12, mais n'admet pas de sous-groupe d'ordre 6 bien que 6 divise 12.

13. Par ce qu'on vient d'établir, l'unique sous-groupe d'ordre 4 de $\mathbb{U}_{32}$ est le sous-groupe engendré par ζ^d avec $d = \frac{32}{4} = 8$, soit $\langle \zeta^8 \rangle = \{1, \zeta^8, \zeta^{16}, \zeta^{24}\}$.

Remarque. De même, l'unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}, +)$ est $\langle \overline{8} \rangle = \{\overline{0}, \overline{8}, \overline{16}, \overline{24}\}$.

Partie IV : Un peu de botanique des groupes.

14. Soit G un groupe fini d'ordre p premier. Prenons $g \in G$ différent de l'élément neutre e . L'ordre du sous-groupe $\langle g \rangle$ de G divise l'ordre p de G . Il est donc égal à 1 ou à p .

Si $\langle g \rangle$ est d'ordre 1, il ne contient qu'un seul élément qui est nécessairement l'élément neutre. Mais alors $g \in \langle g \rangle = \{e\}$, ce qui contredit $g \neq e$.

Donc $\langle g \rangle$ est d'ordre p . Puisque $\langle g \rangle \subset G$ et que ces deux ensembles sont de même cardinal p , ils sont donc égaux. Ainsi, $G = \langle g \rangle$, G est un groupe cyclique à p élément. Par la question 8, G est donc isomorphe à $\mathbb{U}_p$.

Soit p un nombre premier. Montrer que si G est un groupe fini d'ordre p , alors G est isomorphe à $\mathbb{U}_p$.

15. Dans cette question, on cherche à déterminer tous les groupes finis d'ordre 4 à isomorphisme près.

- (a) Rappelons que $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2 = \{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$. Donnons les tables de ces groupes.

$\times$	1	i	-1	$-i$
1	1	i	-1	$-i$
i	i	-1	$-i$	1
-1	-1	$-i$	1	i
$-i$	$-i$	1	i	-1

$\times$	(1, 1)	(-1, 1)	(1, -1)	(-1, -1)
(1, 1)	(1, 1)	(-1, 1)	(1, -1)	(-1, -1)
(-1, 1)	(-1, 1)	(1, 1)	(-1, -1)	(1, -1)
(1, -1)	(1, -1)	(-1, -1)	(1, 1)	(-1, 1)
(-1, -1)	(-1, -1)	(1, -1)	(-1, 1)	(1, 1)

- (b) Soit G un groupe d'ordre 4. Nous avons établi dans ce DM que tout élément $g \in G$ est d'ordre fini, et que son ordre divise 4. Ainsi, $o(g)$ est égal à 1 (auquel cas $g = e$), 2 ou 4.

Deux cas se présentent :

- S'il existe un élément $g \in G$ d'ordre 4. Alors $\langle g \rangle$ est un sous-ensemble de G de cardinal 4. Puisque $|G| = 4$, $G = \langle g \rangle$ et G est un groupe cyclique à 4 éléments. Par ce qu'on a établi, G est donc isomorphe à $\mathbb{U}_4$.
- Sinon, supposons que tous les éléments de G différents de l'élément neutre sont d'ordre 2. Notons $G = \{e, a, b, c\}$, où e est l'élément neutre de G , et a, b, c les trois autres éléments de G . Par hypothèse, $a^2 = e = b^2 = c^2$, et a, b et c sont leur propre inverse. Déterminons le produit $a * b$:

- Si $a \times b = e$, alors en multipliant par a à gauche, on obtient $b = a$, ce qui est faux car a et b sont supposés distincts.
- Si $a \times b = a$, alors en multipliant de nouveau par a à gauche, on obtient $b = e$, ce qui là aussi est faux car $b \neq e$. On montre de même que $a \times b \neq b$.

Ainsi, $a \times b = c$. On montre de même que $b \times a = c$, $a \times c = c \times a = b$ et que $b \times c = c \times b = a$.

On peut alors dresser la table de ce groupe :

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

On observe que cette table est identique à celle du groupe $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$ (quitte à renommer ses éléments). Donc G est isomorphe au groupe $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$.

On vient ainsi de montrer qu'à isomorphisme près, il existe exactement deux groupes finis à 4 éléments, à savoir $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$. Un corollaire de cette étude est qu'un groupe fini à 4 élément est nécessairement abélien.

Remarque. Par les résultats obtenus en cours et dans ce DM, nous avons montré qu'à isomorphisme près :

- il existe un unique groupe d'ordre 1, qui est $\mathbb{U}_1 = \{1\}$;
- il existe un unique groupe d'ordre 2, qui est $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$;
- il existe un unique groupe d'ordre 3, qui est $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$;
- il existe deux groupes d'ordre 4, qui sont $\mathbb{U}_4$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$;
- il existe un unique groupe d'ordre 5 (car 5 est premier), qui est $\mathbb{U}_5 = \{e^{\frac{2ik\pi}{5}}, k = 0, 1, 2, 3, 4\}$.

On pourrait prolonger cette étude. On trouverait que (mais cela nécessite des outils un peu plus élaborés) :

- il existe deux groupes d'ordre 6, $\mathbb{U}_6$ qui est abélien, et $\mathfrak{S}_3$ qui ne l'est pas.
- il existe un unique groupe d'ordre 7 (car 7 est premier), qui est $\mathbb{U}_7$.
- il existe trois groupes **abéliens** d'ordre 8, qui sont $\mathbb{U}_8$, $\mathbb{U}_4 \times \mathbb{U}_2$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$.