

A rendre le 13/03/26

Exercice 1

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ que l'on notera x_n . On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi \sim \frac{\pi}{2}$.
4. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass)

Partie I. Fonctions uniformément continues et théorème de Heine

Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors elle est continue.
2. On suppose dans cette question que I est un segment $[a, b]$, avec $a < b$.

On souhaite prouver que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I , alors elle est uniformément continue (*théorème de Heine*).

On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas uniformément continue. Ainsi, on suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $(x, y) \in I^2$ vérifiant $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. Dans la suite, on se fixe un tel $\varepsilon > 0$.

- (a) Justifier qu'il existe deux suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans I telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

- (b) Prouver qu'il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ et un réel $c \in I$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = c$.

- (c) Aboutir à une contradiction.

Partie II. Polynômes de Bernstein

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1 - X)^{n-k} \in \mathbb{R}[X]$.

3. Déterminer le degré de $B_{n,k}$, ses racines et leur multiplicité, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On souhaite prouver qu'il existe un unique $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^n \lambda_k B_{n,k}$.

- (a) En utilisant les racines des $B_{n,k}$, justifier qu'un tel $(n+1)$ -uplet, s'il existe, est unique.

- (b) À l'aide de l'identité $X^k = X^k(X + (1 - X))^{n-k}$, prouver que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^k = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} B_{n,j}$.
- (c) Conclure.

5. Prouver que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n B_{n,k} = 1$, $\sum_{k=0}^n k B_{n,k} = nX$, $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k} = n(n-1)X^2$.
6. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n (k - nX)^2 B_{n,k} = nX(1 - X)$.

Partie III. Approximation uniforme d'une fonction continue

Si $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $[0, 1]$, on note $\|g\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |g(x)|$, qui est bien défini par le théorème des bornes atteintes.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $B_n(f) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} \in \mathbb{R}_n[X]$.

On souhaite prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon$. Dans toute la suite de cette partie, on considère $\varepsilon > 0$ fixé. Par le théorème de Heine, il existe donc $\eta > 0$ tel que : $\forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

7. Prouver que pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) - [B_n(f)](x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x)$.
8. Soit $x \in [0, 1]$ fixé et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A_x = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| x - \frac{k}{n} \right| < \eta \right\}$, et on note B_x le complémentaire de A_x dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

(a) Prouver que $\sum_{k \in A_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) < \varepsilon$.

(b) Montrer que $\eta^2 \sum_{k \in B_x} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in B_x} \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}$.

(c) Montrer que $\sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$.

(d) En déduire que $\|f - B_n(f)\|_\infty < \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$.

Conclure.

Ainsi, on a prouvé que pour toute fonction continue f sur $[0, 1]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. Ce qui signifie que les courbes représentatives de f et de P sont toujours à une distance inférieure à ε . C'est le théorème de Weierstrass, que vous reformulerez en seconde année en disant que les fonctions polynomiales sont denses (en un sens à préciser) dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

Le théorème se généralise sans difficultés au cas d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$.