Correction - DM 14

A rendre le 19/05/26

Exercice 1

1. Notons P_k^i (resp. F_k^i) l'événement "obtenir Pile (resp. Face) avec la pièce n°k au i-ième lancer".
   Les pièces étant équilibrées et les lancers indépendants, on a :
$$a_1 = P(F_1^1 \cap F_2^1) = P(F_1^1)P(F_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
$$b_1 = P\Big((P_1^1 \cap F_2^1) \cup (F_1^1 \cap P_2^1)\Big) = P(P_1^1)P(F_2^1) + P(F_1^1)P(P_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$
$$c_1 = P(P_1^1 \cap P_2^1) = P(P_1^1)P(P_2^1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$
   Ainsi, $\boxed{a_1 = \frac{1}{4},\ b_1 = \frac{1}{2} \text{ et } c_1 = \frac{1}{4}.}$

2. Soit n un entier naturel non nul. Alors :
   - S'il y a eu 0 Piles à l'étape n, alors on ne relance aucune pièce et il y aura nécessairement 0 Piles à l'étape $n+1$. Donc
$$\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 \text{ et } P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0.}$$
   - S'il y a eu 1 Pile à l'étape n, alors on relance une seule pièce, qui donnera Pile ou Face avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Donc
$$\boxed{P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2},\ P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2} \text{ et } P_{B_n}(C_{n+1}) = 0.}$$
   - S'il y a eu 2 Piles à l'étape n, on relance les deux pièces.
     Elles donneront le couple Face-Face avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc
$$\boxed{P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}.}$$
     Elles donneront les couples Pile-Face ou Face-Pile avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Donc
$$\boxed{P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}.}$$
     Elles donneront le couple Pile-Pile avec la probabilité $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Donc
$$\boxed{P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}.}$$

3. Soit n un entier naturel non nul fixé. La famille $\{A_n, B_n, C_n\}$ constitue un système complet d'événements. En appliquant la formule des probabilités totales et avec les probabilités condi-

tionnelles calculées précédemment, on obtient :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= P(A_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\
&= a_n \times 1 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{4} \\
&= \boxed{a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n.}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= P(B_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.}
\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= P(C_{n+1}) \\
&= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1}) \\
&= P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) \\
&= a_n \times 0 + b_n \times 0 + c_n \times \frac{1}{4} \\
&= \boxed{\frac{1}{4}c_n.}
\end{aligned}$$

4. (a) (c_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ donc

$$\boxed{c_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} c_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^n.}$$

(b) Avec la question 3,

$$\begin{aligned}
b_{n+2} &= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}c_{n+1} \\
&= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{8}c_n \\
&= \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{8}\left(2b_{n+1} - b_n\right) \\
&= \boxed{\frac{3}{4}b_{n+1} - \frac{1}{8}b_n.}
\end{aligned}$$

(c) (b_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En suivant la méthode habituelle, on obtient (calculs laissés au lecteur) :

$$\boxed{b_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n.}$$

Finalement, comme $a_n + b_n + c_n = 1$, on obtient :

$$\boxed{a_n = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^n.}$$

(d) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 1,\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} c_n = 0.}$$

La probabilité de n'avoir que des faces tend vers 1 car on relance tous les piles à chaque étape...

Exercice 2

1. (a) On commence par déterminer une famille génératrice de F :

$$F = \{(x,y,z) \mid y = z\} = \{(x,y,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,1)).$$

Ainsi, la famille $((1,0,0),(0,1,1))$ est génératrice de F. Elle est également libre (deux vecteurs non colinéaire). Donc $\boxed{((1,0,0),(0,1,1)) \text{ est une base de } F.}$

(b) De même,

$$G = \{(x,y,z) \mid x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\} = \{(y,y,2y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,1,2)).$$

Ainsi, la famille $((1,1,2))$ est génératrice de G. Elle est également libre (un vecteur non nul). Donc $\boxed{((1,1,2)) \text{ est une base de } G.}$

(c) Pour démontrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$, on montre que la famille $((1,0,0),(0,1,1),(1,1,2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Commençons par démontrer sa liberté :

$$a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,1,2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ b + 2c &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Ainsi, $((1,0,0),(0,1,1),(1,1,2))$ est une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$, et donc $\boxed{\mathbb{R}^3 = F \oplus G.}$

2. (a) Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Cherchons trois réels a, b et c tels que :

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,1,1) + c(1,1,2).$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a + c &= x \\ b + c &= y \\ b + 2c &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= x + y - z \\ b &= 2y - z \\ c &= z - y \end{cases}$$

Ainsi,

$$(x,y,z) = \underbrace{(x+y-z)(1,0,0) + (2y-z)(0,1,1)}_{\in F} + \underbrace{(z-y)(1,1,2)}_{\in G}.$$

Par unicité, on a finalement :

$$\boxed{u_F = (x+y-z, 2y-z, 2y-z) \quad \text{et} \quad u_G = (z-y, z-y, 2z-2y).}$$

(b) On déduit directement de la question précédente que :

$$p((x,y,z)) = (x+y-z, 2y-z, 2y-z).$$

3. (a) Montrons que q est linéaire. Soient $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} q(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)) &= q((\lambda x_1+x_2,\lambda y_1+y_2,\lambda z_1+z_2))\\ &= ((\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2)-(\lambda z_1+z_2),\lambda y_1+y_2,\lambda y_1+y_2)\\ &= \lambda(x_1+y_1-z_1,y_1,y_1)+(x_2+y_2-z_2,y_2,y_2)\\ &= \lambda q((x_1,y_1,z_1))+q((x_2,y_2,z_2)).\end{aligned}$$

Ainsi, q est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Donc $\boxed{q \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}^3.}$

(b) On sait déjà que $q\in\mathscr{L}(E)$. Montrons que $q\circ q=q$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(q\circ q)((x,y,z)) &= q(q((x,y,z)))\\ &= q((x+y-z,y,y))\\ &= ((x+y-z)+y-y,y,y)\\ &= (x+y-z,y,y)\\ &= q((x,y,z)).\end{aligned}$$

Ainsi, $q\circ q=q$ et $\boxed{q \text{ est un projecteur.}}$

(c) On a :

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(q)\Leftrightarrow (x+y-z,y,y)=0\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z\\ y &= 0\end{cases}$$

Donc :

$$\mathrm{Ker}(q)=\{(z,0,z)\mid z\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}((1,0,1)).$$

La famille $((1,0,1))$ est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(q)$. Elle est également libre (un vecteur non nul). Donc $\boxed{((1,0,1)) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(q).}$

(d) Montrons que $\mathrm{Ker}(q)\cap G=\{0\}$.

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(q)\cap G\Leftrightarrow \begin{cases} x &= z\\ y &= 0\\ x-y &= 0\\ z-2y &= 0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(q)$ et G sont en somme directe.

(e) Comme q est un projecteur, $\mathrm{Im}(q)=\mathrm{Ker}(q-\mathrm{Id}_E)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in\mathrm{Im}(q) &\Leftrightarrow (x,y,z)\in\mathrm{Ker}(q-\mathrm{Id}_E)\\ &\Leftrightarrow q((x,y,z))-(x,y,z)=0\\ &\Leftrightarrow (y-z,0,0)=0\\ &\Leftrightarrow y-z=0\\ &\Leftrightarrow (x,y,z)\in F.\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\mathrm{Im}(q)=F.}$

(f) Pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$(p\circ q)(x,y,z)=p(\underbrace{q((x,y,z))}_{\in\mathrm{Im}(q)=F})=q((x,y,z)),$$

car F est l'ensemble des invariants de p. Donc $\boxed{p\circ q=q.}$

De même, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$(q\circ p)(x,y,z)=q(\underbrace{p((x,y,z))}_{\in F=\mathrm{Im}(q)})=p((x,y,z)),$$

car $\mathrm{Im}(q)$ est l'ensemble des invariants de q. Donc $\boxed{q\circ p=p.}$

4. (a) Comme $p, q \in \mathscr{L}(E)$, $r = p + q \in \mathscr{L}(E)$. De plus,

$$r \circ r = (p+q) \circ (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q2 = p + q + p + q = 2r.$$

Ainsi, $r \circ r \neq r$ et $r \circ r \neq \mathrm{Id}_E$. Donc $\boxed{r \text{ n'est pas un projecteur, ni une symétrie.}}$

(b) On montre par récurrence (laissée au lecteur) que : $\boxed{\forall n \geq 1,\ r^n = 2^{n-1} r.}$