

Correction - DM 15

A rendre le 26/05/26**Exercice 1**

$$1. \text{ (a) } \boxed{(X_2 = 0) = R_1 \cap R_2, (X_2 = 1) = (R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2), (X_2 = 2) = B_1 \cap B_2.}$$

$$(b) X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

Avec la formules des probabilités composées, on a :

$$P(X_2 = 0) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Par incompatibilité puis avec la formules des probabilités composées, on a :

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= P((R_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap R_2)) = P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1)P_{R_1}(B_2) + P(B_1)P_{B_1}(R_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Avec la formules des probabilités composées, on a :

$$P(X_2 = 2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $\boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 2])}$. Donc X_2 admet une espérance et une variance et on a :

$$\boxed{E(X_2) = \frac{0+2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad V(X_2) = \frac{(2-0)(2-0+2)}{12} = \frac{2}{3}.$$

2. (a) Avec la formules des probabilités composées, on a :

$$P(X_3 = 0) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1 \cap R_2}(R_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}},$$

$$P(X_3 = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1 \cap B_2}(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

(b) Avec le SCE $(X_2 = i)_{0 \leq i \leq 2}$, on a :

$$\begin{aligned} P(X_3 = 1) &= P\left(\bigcup_{i=0}^2 (X_2 = i) \cap (X_3 = 1)\right) \\ &= \sum_{i=0}^2 P((X_2 = i) \cap (X_3 = 1)) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \sum_{j=0}^2 P(X_2 = j)P_{(X_2=j)}(X_3 = k) \quad (\text{probabilités composées}). \end{aligned}$$

Calcul de $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1)$

On constate que l'on a obtenu aucune boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de 3 boules rouges et de 1 boule blanche à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule blanche au troisième tirage donc $P_{(X_2=0)}(X_3 = 1) = \frac{1}{4}$.

Calcul de $P_{(X_2=1)}(X_3 = 1)$

On constate que l'on a obtenu une boule blanche durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages. Nous disposons donc de

2 boules rouges et de 2 boules blanches à l'issue de la deuxième pioche et on obtient une boule rouge au troisième tirage donc $P_{(X_2=1)}(X_3 = 1) = \frac{2}{4}$.

Calcul de $P_{(X_2=2)}(X_3 = 1)$

On constate que l'on a obtenu deux boules blanches durant les deux premiers tirages et on souhaite obtenir une boule blanche dans les trois premiers tirages, ce qui est impossible donc $P_{(X_2=2)}(X_3 = 1) = 0$.

$$\text{Ainsi, } P(X_3 = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{4} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{3}{3 \times 4} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

(c) Comme $(X_3 = i)_{0 \leq i \leq 3}$ est un SCE,

$$P(X_3 = 2) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 1) - P(X_3 = 3) = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

On a ainsi démontré que $\boxed{X_3 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, 3 \rrbracket)}$.

3. (a) $\boxed{X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket}$.

D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P(R_1 \cap \dots \cap R_n) = P(R_1)P_{R_1}(R_2) \dots P_{R_1 \cap \dots \cap R_{n-1}}(R_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

(b) En considérant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$:

$$(X_n = k) = \bigcup_{i=0}^{n-1} ((X_{n-1} = i) \cap (X_n = k))$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= P\left(\bigcup_{i=0}^{n-1} ((X_{n-1} = i) \cap (X_n = k))\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P((X_{n-1} = i) \cap (X_n = k)) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} P(X_{n-1} = i)P_{(X_{n-1}=i)}(X_n = i) \quad (\text{probas composées}) \end{aligned}$$

Or, si l'on veut obtenir k boules blanches durant les n tirages, il est indispensable d'avoir obtenu k boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages (donc le n -ième tirage donne une boule rouge) ou l'on a obtenu $k-1$ boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages (donc le n -ième tirage fournit une boule blanche). Donc les probabilités conditionnelles $P_{(X_{n-1}=i)}(X_n = i)$ sont nulles sauf si $i = k-1$ ou si $i = k$.

On en déduit que

$$\boxed{P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)}.$$

(c) Calcul de $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$

On a obtenu $k-1$ boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages et on souhaite obtenir k boules blanches dans les n premiers tirages. Nous disposons donc de $(k-1) + 1 = k$ boules blanches et de $(n+1) - k = n - k + 1$ boules rouges à l'issue de la $(n-1)$ -ième pioche (qui compte $2 + (n-1) = n+1$ boules) et on obtient une boule blanche au n -ième tirage donc

$$\boxed{P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) = \frac{k}{n+1}}.$$

Calcul de $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$

On a obtenu k boules blanches durant les $(n-1)$ premiers tirages et on souhaite obtenir k boules blanches dans les n premiers tirages. Nous disposons donc de $k+1$ boules blanches et de $(n+1) - (k+1) = n-k$ boules rouges à l'issue de la $(n-1)$ -ième pioche (qui compte $2 + (n-1) = n+1$ boules) et on obtient une boule rouge au n -ième tirage donc

$$P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k) = \frac{n-k}{n+1}.$$

(d) Posons $\mathcal{P}(n) : \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$.

I $\mathcal{P}(2)$ est vraie car $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 2) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$.

H Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie.

Pour tout $1 \leq k \leq n$, on a avec les questions 3.(b) et 3.(c) et en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= P(X_n = k-1)P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) + P(X_n = k)P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1-k}{n+2} = \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

La formule est donc pour tout $1 \leq k \leq n$. Pour $k = n+1$, on a (en utilisant la question 3.(a)) :

$$P(X_{n+1} = n+1) = 1 - \sum_{k=0}^n P(X_{n+1} = k) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+2} = 1 - \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie quel que soit $n \geq 2$.

(e) On remarque que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$. Donc X_n admet une espérance et une variance et on a :

$$E(X_n) = \frac{0+n}{2} = \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad V(X_n) = \frac{(n-0)(n-0+2)}{12} = \frac{n(n+2)}{12}.$$

Exercice 2

1. (a) Par définition de F , \mathcal{B} est une famille génératrice de F . Il reste à montrer que cette famille est libre : soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \sin + b \cos + c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch} = 0$. En dérivant deux fois,

$$-a \sin - b \cos + c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch} = 0.$$

Par addition et soustraction, on en déduit :

$$a \sin + b \cos = 0 \quad \text{et} \quad c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch} = 0.$$

En prenant les images de $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ dans la première relation, on obtient $a = b = 0$.

En prenant l'image de $x = 0$ dans la deuxième relation, on obtient $d = 0$. Il reste $c \operatorname{sh} = 0$ d'où $c = d = 0$.

Ainsi, \mathcal{B} est libre et génératrice de F . \mathcal{B} est donc bien une base de F .

(b) Nous savons que la dérivation est linéaire. Il suffit donc de vérifier que $\Delta(F) \subset F$. Pour tous réels a, b, c, d ,

$$\Delta(a \sin + b \cos + c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch}) = -a \sin + b \cos + c \operatorname{sh} + d \operatorname{ch} \in F.$$

Ainsi, $\Delta(F) \subset F$ et Δ est bien un endomorphisme de F .

D'autre part, Δ transforme la base \mathcal{B} en $\Delta(\mathcal{B})$, qui est une base de F (identique à \mathcal{B} , à l'ordre près et avec un changement de signe).

Ainsi, Δ est bijective et donc Δ est un automorphisme de F .

2. (a) Soit $f = \Delta - id$. Alors :

$$f(\sin) = \cos - \sin, \quad f(\cos) = -\sin - \cos, \quad f(\text{sh}) = \text{ch} - \text{sh}, \quad f(\text{ch}) = \text{sh} - \text{ch}.$$

Ainsi,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) On détermine le noyau de la matrice de f :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \text{Ker} \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b = 0 \\ a - b = 0 \\ -c + d = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0 \text{ et } c = d.$$

Donc

$$\text{Ker} \left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\boxed{\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\text{sh} + \text{ch}) = \text{Vect}(\exp)}$.

(c) Soit $y \in F$. Alors :

$$y' - y = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \text{Ker}(f) = \text{Vect}(\exp).$$

Ainsi, l'ensemble des solutions dans F de l'équation (E_0) est

$$\boxed{\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto \lambda \exp(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}}.$$

3. (a) On a vu que

$$f(\sin) = \cos - \sin, \quad f(\cos) = -\sin - \cos, \quad f(\text{sh}) = \text{ch} - \text{sh}, \quad f(\text{ch}) = \text{sh} - \text{ch}.$$

Donc (par linéarité de f) :

$$\begin{aligned} \sin &= \frac{-f(\sin) - f(\cos)}{2} = f\left(-\frac{1}{2}(\sin + \cos)\right), \\ \cos &= \frac{f(\sin) - f(\cos)}{2} = f\left(\frac{1}{2}(\sin - \cos)\right), \\ \varphi &= \text{ch} - \text{sh} = f(\text{sh}). \end{aligned}$$

(b) On a vu que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(\exp)$. Comme (\exp) est une famille libre (un vecteur non nul) et génératrice de $\text{Ker}(f)$, c'est une base de $\text{Ker}(f)$ qui est donc de dimension 1. Avec le théorème du rang (comme F est de dimension finie),

$$\text{rg}(f) = \dim(F) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3.$$

Or on sait avec la question précédente que (\sin, \cos, φ) est une famille de vecteurs de $\text{Im}(f)$. Elle est libre car :

$$a \sin + b \cos + c \varphi = 0 \Leftrightarrow a \sin + b \cos - c \text{sh} + c \text{ch} = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0 \quad (\text{par liberté de } \mathcal{B}).$$

Comme (\sin, \cos, φ) est une famille libre de trois vecteurs de $\text{Im}(f)$ qui est de dimension 3,

$\boxed{(\sin, \cos, \varphi) \text{ est une base de } \text{im}(f)}$.

(c) Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{aligned} y' - y = e^{-x} + \sin(x) &\Leftrightarrow f(y) = f(\text{sh}) + f\left(-\frac{1}{2}(\sin + \cos)\right) \\ &\Leftrightarrow f\left(y - \text{sh} + \frac{1}{2}(\sin + \cos)\right) = 0 \quad (\text{par linéarité de } f) \\ &\Leftrightarrow y - \text{sh} + \frac{1}{2}(\sin + \cos) \in \text{Ker}(f) \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y - \text{sh} + \frac{1}{2}(\sin + \cos) = \lambda \exp \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans F de l'équation (E) est donc :

$$\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \text{sh}(x) - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + \lambda \exp(x) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3

Partie I - Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie

1. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, on a :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = \boxed{(1-p+pt)^n}.$$

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$, on a (si $t \neq 1$) :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k)t^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} t^k = \boxed{\frac{1-t^{n+1}}{n(1-t)}}.$$

2. Le théorème de transfert garantit que

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^n t^k P(X = k),$$

c'est-à-dire que $\boxed{G_X(t) = E(t^X)}$.

3. G_X étant une fonction polynômiale, G_X est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . En dérivant une première fois, on obtient :

$$G'_X(t) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) t^{k-1}.$$

En particulier,

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k P(X = k) = \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \boxed{G'_X(1)}.$$

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$G''_X(t) = \sum_{k=2}^n k(k-1) P(X = k) t^{k-2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} G''_X(1) &= \sum_{k=2}^n k(k-1) P(X = k) = \sum_{k=2}^n k^2 P(X = k) - \sum_{k=2}^n k P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 P(X = k) - \sum_{k=1}^n k P(X = k) = E(X^2) - E(X). \end{aligned}$$

Avec la formule de Koenig-Huygens, on a finalement :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - E(X) + E(X) - (E(X))^2 \\ &= \boxed{G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2}. \end{aligned}$$

4. G_X est indéfiniment dérivable. Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout réel t ,

$$G_X^{(j)}(t) = \sum_{k=j}^n k(k-1)\dots(k-j+1)P(X=k)t^{k-j} = \sum_{k=j}^n \frac{k!}{(k-j)!}P(X=k)t^{k-j}.$$

Pour $t = 0$, la somme ci-dessus ne contient plus que le terme correspondant à $k = j$ (les autres sont nuls) et on obtient :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, G_X^{(j)}(0) = j! \times P(X = j).$$

Ainsi, la connaissance de G_X permet de retrouver la loi de X , puisque que

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = j) = \frac{G_X^{(j)}(0)}{j!}.$$

Partie II - Une application

5. $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P((P_1 \cap P_2) \cup (F_1 \cap F_2)) \\ &= P(P_1 \cap P_2) + P(F_1 \cap F_2) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= 1 - P(X_2 = 0) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2), E(X_2) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X_2) = \frac{1}{4}.$$

$X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P((P_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)) \\ &= P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P((P_1 \cap F_2 \cap P_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3)) \\ &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

$$P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

On détermine alors l'espérance et la variance de X_3 :

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) = \boxed{1},$$

$$E(X_3^2) = 0^2 \times P(X_3 = 0) + 1^2 \times P(X_3 = 1) + 2^2 \times P(X_3 = 2) = \boxed{\frac{3}{2}},$$

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

6. $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$\begin{aligned} P(X_n = 0) &= P((P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n)) \\ &= P(P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n) + P(F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_n = n-1) &= P((P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \dots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots)) \\ &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \dots) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots) \quad (\text{par incompatibilité}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \quad (\text{par indépendance}) \\ &= \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}}, \end{aligned}$$

7. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Avec le SCE $(X_n = i)_{0 \leq i \leq n-1}$,

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X_n = i)P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k).$$

Or $P_{(X_n=i)}(X_{n+1} = k) = 0$ si $i \neq k-1, k$ et $P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) = P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}$.

Finalement,

$$\boxed{P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1)}.$$

8. (a) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 G_{n+1}(t) &= \sum_{k=0}^n P(X_{n+1} = k)t^k \\
 &= P(X_{n+1} = 0) + \sum_{k=1}^n P(X_{n+1} = k)t^k \\
 &= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1) \right) t^k \quad (\text{questions précédentes}) \\
 &= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(X_n = k-1)t^k \\
 &= \frac{1}{2}P(X_n = 0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)t^{k+1} \quad (\text{changement de variable}) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)t^k + \frac{1}{2}t \sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)t^k \quad (\text{car } P(X_n = n) = 0) \\
 &= \frac{1}{2}G_n(t) + \frac{t}{2}G_n(t) \\
 &= \boxed{\frac{(1+t)}{2}G_n(t)}.
 \end{aligned}$$

(b) Soit $t \in [0, 1]$. Avec la question 5,

$$G_2(t) = \sum_{k=0}^1 P(X_2 = k)t^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t = \frac{1+t}{2}.$$

Or, on a démontré que $(G_n(t))_{n \geq 2}$ est une suite géométrique (de premier terme $G_2(t) = \frac{1+t}{2}$ et de raison $\frac{1+t}{2}$). Donc pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{G_n(t) = \left(\frac{1+t}{2} \right)^{n-1}}.$$

(c) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 G'_n(t) &= (n-1) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+t}{2} \right)^{n-2} \\
 G''_n(t) &= (n-1)(n-2) \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{1+t}{2} \right)^{n-3}
 \end{aligned}$$

Donc, avec la question 3,

$$\begin{aligned}
 E(X_n) &= G'_n(1) \\
 &= \boxed{\frac{n-1}{2}}, \\
 V(X_n) &= G''_n(1) + G'_n(1) - (G'_n(1))^2 \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \frac{(n-1)^2}{4} \\
 &= \frac{(n-1)((n-2) + 2 - (n-1))}{4} \\
 &= \boxed{\frac{n-1}{4}}.
 \end{aligned}$$