DM 15

A rendre le 26/05/26

Exercice 1

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.
On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne puis on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule que l'on vient de tirée.
Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boule blanche obtenues au cours des n tirages.
Enfin, pour tout entier $k \geq 1$, on pose B_k (resp. R_k) l'événement : "obtenir une boule blanche (resp. rouge) à la k-ième pioche".

1. Loi de X_2
   (a) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, exprimer l'évènement $(X_2 = k)$ à l'aide d'évènements B_k et R_k.
   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2.
2. Loi de X_3
   (a) Calculer $P(X_3 = 0)$ et $P(X_3 = 3)$.
   (b) Avec le système complet d'évènements $(X_2 = 0)$, $(X_2 = 1)$, $(X_2 = 2)$, calculer $P(X_3 = 1)$.
   (c) En déduire la loi de X_3.
3. Loi de X_n lorsque $n \geq 2$
   (a) Expliciter $X_n(\Omega)$ et calculer $P(X_n = 0)$.
   (b) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. En introduisant le système complet d'événements $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$, montrer que :
   $$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$$
   (c) Calculer soigneusement $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$ et $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$.
   (d) Montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X_n = k) = \dfrac{1}{n+1}$.
   (e) Donner l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 2

On considère E l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{B} = (\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$. On note Δ l'application linéaire qui à toute fonction f associe sa dérivée f'.

1. (a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de F.
   (b) Montrer que Δ est un endomorphisme de F. Est-ce un automorphisme de F ?
2. Soit id l'application identité de F, et $f = \Delta - \mathrm{id}$.
   (a) Écrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.
   (b) Déterminer le noyau de f.
   (c) En déduire les solutions dans F de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
3. On note φ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $\varphi(x) = e^{-x}$.
   (a) Calculer un antécédent par f des fonctions sin, cos et φ.
   (b) Montrer que $(\sin, \cos, \varphi)$ est une base de l'image de f.
   (c) En déduire les solutions dans F de l'équation différentielle (E) : $y' - y = e^{-x} + \sin(x)$.

Exercice 3

Partie I - Fonction génératrice d'une variable aléatoire finie

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$. On appelle *fonction génératrice de* X la fonction polynômiale G_X définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)\, t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de X lorsque $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ ($p \in]0, 1[$) puis $X \sim \mathscr{U}([\![0, n]\!])$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = E(t^X)$.
3. Montrer que $E(X) = G'_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \big(G'_X(1)\big)^2$.
4. Montrer que la donnée de la fonction génératrice G de X caractérise la loi de X.

Partie II - Une application

On effectue une succession de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour $n \geq 2$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue de n lancers.

5. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_2 et de X_3.
6. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n - 1)$.
7. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k - 1).$$

8. On note G_n la fonction génératrice de la variable X_n.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{n+1}(t) = \dfrac{(1+t)}{2} G_n(t)$.
   (b) En déduire une expression de $G_n(t)$ en fonction de n et de s.
   (c) Calculer alors l'espérance et la variance de X_n.