Correction - DM 16

A rendre le 02/06/26

Exercice 1
Partie I : Étude de l'endomorphisme Δ.

1. (a) La famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre puisqu'elle est composée de polynômes dont les degrés sont $0, 1, 2, \ldots, n$. Comme c'est une famille libre de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la dimension est $n+1$, $\boxed{(P_0, P_1, \ldots, P_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X].}$

   (b) Pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on a $P_n(k) = 0$, et pour $k \geq n$, on a :

$$P_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\ldots(k-n+1) = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n} \in \mathbb{N}.$$

   De même, on obtient :

$$P_n(-k) = \frac{1}{n!}(-k)(-k-1)\ldots(-k-n+1) = \frac{(-1)^n(k+n-1)!}{n!(k-1)!} = (-1)^n\binom{k+n-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{pour tous } k, n \in \mathbb{N},\ P_n(k) \text{ et } P_n(-k) \text{ sont des entiers.}}$

   (c) D'une part, puisque les polynômes P_n sont à valeurs entières sur les entiers, il est clair que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ à coefficients entiers dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$ est à valeurs entières sur les entiers.

   On étudie maintenant la réciproque de cette propriété et on considère donc un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ s'écrivent $P = p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_nP_n$ et tel que $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) \in \mathbb{Z}$.
   Montrons par récurrence que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $p_i \in \mathbb{Z}$.

   I En évaluant en 0, qui est racine de $P_1, \ldots, P_n$, on obtient $p_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$.

   H Soit $i \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons que $p_0, \ldots, p_i$ sont des entiers et montrons que p_{i+1} est aussi entier.
   En évaluant en $i+1$, qui est racine de $P_{i+1}, \ldots, P_n$, on obtient la relation suivante :

$$p_0P_0(i+1) + \ldots + p_iP_i(i+1) + p_{i+1}P_{i+1}(i+1) = P(i+1) \in \mathbb{Z}.$$

   Comme $P_{i+1}(i+1) = 1$, on en déduit $p_{i+1} = P(i+1) - (p_0P_0(i+1) + \ldots + p_iP_i(i+1)) \in \mathbb{Z}$.

   On a ainsi prouvé par récurrence que les coefficients de P dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$ sont entiers.

2. (a) Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta(\lambda P + Q)(X) = (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X).$$

   Par linéarité de l'évaluation,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q)(X) &= \lambda(P(X+1) - P(X)) + (Q(X+1) - Q(X))\\ &= \lambda\Delta(P)(X) + \Delta(Q)(X).\end{aligned}$$

   Ainsi, $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ est linéaire et $\boxed{\Delta \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}[X].}$

   (b) Comme P_0 est constant, il est clair que $\boxed{\Delta(P_0) = 0.}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\Delta(P_{n+1})(X) &= \frac{1}{(n+1)!}\left[(X+1)X\dots(X-n+1) - X(X-1)\dots(X-n)\right]\\ &= \frac{(X+1)-(X-n)}{(n+1)!}(X+1)X\dots(X-n+1)\\ &= \frac{1}{n!}X(X-1)\dots(X-n+1)\\ &= P_n.\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \Delta(P_{n+1}) = P_n.}$

(c) Soit P un polynôme de degré d, qui s'écrit $P = p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_dP_d$ dans la base $(P_0, \ldots, P_d)$ de $\mathbb{R}_d[X]$ (avec $p_d \neq 0$). Alors :

$$\begin{aligned}\Delta(P) &= \Delta(p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_dP_d)\\ &= p_0\Delta(P_0) + p_1\Delta(P_1) + \ldots + p_d\Delta(P_d) \quad \text{(par linéarité de } \Delta)\\ &= p_1P_0 + p_2P_1 + \ldots + p_dP_{d-1} \quad \text{(avec la question précédente).}\end{aligned}$$

Il en résulte que $\boxed{\Delta(P) \text{ est de degré } \deg(P) - 1.}$

Comme Δ abaisse le degré d'une unité, $\Delta^d(P)$ est par conséquent un polynôme constant dont l'image par Δ est donc nulle, ce qui donne $\boxed{\Delta^{d+1}(P) = 0.}$

(d) Soit un polynôme de degré d, défini par $P = p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_dP_d$ (avec $p_d \neq 0$).

$$\begin{aligned}P \in \operatorname{Ker}(\Delta) &\Leftrightarrow \Delta(P) = p_1P_0 + p_2P_1 + \ldots + p_dP_{d-1} = 0\\ &\Leftrightarrow p_1 = p_2 = \ldots = p_d = 0\\ &\Leftrightarrow P = p_0P_0 = p_0\\ &\Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_0[X].\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\operatorname{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X] \neq \{0\} \text{ et } \Delta \text{ n'est pas injectif.}}$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, alors, en notant d son degré, il s'écrit $P = p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_dP_d$ (avec $p_d \neq 0$). On peut alors l'écrire sous la forme $P = \Delta(Q)$ comme suit :

$$\begin{aligned}P &= p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_dP_d\\ &= p_0\Delta(P_1) + p_1\Delta(P_2) + \ldots + p_d\Delta(P_{d+1}) \quad \text{(avec la question 2.(b)).}\\ &= \Delta(p_0P_1 + p_1P_2 + \ldots + p_dP_{d+1}) \quad \text{(par linéarité de } \Delta).\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\Delta \text{ est surjectif.}}$

3. (a) Comme $\Delta(P_{j+1}) = P_j$, on a la relation $\Delta^iP_j = P_{j-i}$ pour $0 \leq i \leq j$.
Et comme $\Delta^j(P_j) = P_0 = 1$ et que $\Delta(1) = 0$, il est clair que $\Delta^i(P_j) = 0$ pour $i > j$.
Comme 0 est racine des polynômes P_j pour $j \geq 1$, on a donc $\Delta^i(P_j)(0) = P_{j-i}(0) = 0$ si $0 \leq i < j$, puis $\Delta^j(P_j)(0) = 1$, et enfin $\Delta^i(P_j)(0) = 0$ si $i > j$.
D'où $\boxed{\Delta^i(P_j)(0) = \delta_{i,j}.}$

(b) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Il existe $(p_0, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$P = p_0P_0 + p_1P_1 + \ldots + p_dP_d \quad (p_d \neq 0).$$

En appliquant l'endomorphisme Δ^k pour $0 \leq k \leq n$ aux deux membres puis en évaluant en 0, on obtient (puisque $\Delta^i(P_j(0)) = \delta_{i,j}$) l'égalité $\Delta^k(P)(0) = p_k$.
On tire la formule voulue :

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)P_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k(P)(0)}{k!}X(X-1)\dots(X-k+1).}$$

Partie II : Approximation de dérivées n-ième par différences finies.

4. Montrons cette formule par récurrence.

   $\boxed{\mathbf{I}}$ La formule est évidente pour $n = 0$.

   $\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la formule vérifiée au rang n.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Par hypothèse de récurrence,

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

   Par linéarité de Δ,

$$\Delta^{n+1}(P)(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \Delta(P)(X+j).$$

   En coupant la somme $\Delta(P)(X+j+1) = P(X+j+1) - P(X+j)$, on obtient :

$$\Delta^{n+1}(P)(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j+1) - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

   On pose $i = j+1$ dans la première somme, $i = j$ dans la seconde, et on a :

$$\Delta^{n+1}(P)(X) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} (-1)^{n-i+1} P(X+i) - \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} P(X+j).$$

   On en déduit que :

$$\Delta^{n+1}(P)(X) = P(X+n+1) + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) (-1)^{n+1-i} P(X+i) + (-1)^{n+1} P(X).$$

   Et d'après la formule du triangle de Pascal, on arrive en réintégrant les termes extrêmes :

$$\Delta^{n+1}(P)(X) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (-1)^{n+1-i} P(X+i).$$

   On conclut par le principe de récurrence.

5. (a) Exprimons X^n dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$:

$$X^n = p_0 P_0 + \ldots + p_n P_n.$$

   L'examen des coefficients dominants donne ici $p_n = n!$ et on en déduit en prenant l'image par Δ^n :

$$\boxed{\Delta^n(X^n) = p_n P_0 = p_n = n!.}$$

   En appliquant la formule de la question précédente au polynôme X^n, il vient alors :

$$\Delta^n(X^n) = n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^n.$$

   En évaluant en 0, on obtient finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!.}$$

(b) Pour $0 \leq k < n$, on a $\Delta^n(X^k) = 0$ et toujours avec la même formule :

$$\Delta^n(X^k) = 0 = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} (X+j)^k.$$

En évaluant en 0, on obtient finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0.}$$

6. (a) La formule de Taylor-Young donne, puisque f est de classe $\mathscr{C}^m$ avec $m \geq n$:

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

En changeant h en jh, on a donc :

$$\boxed{f(a+jh) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n).}$$

(b) En reportant dans $A_n(h)$, on obtient donc :

$$h^n A_n(h) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a+jh) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} j^k h^k + o(h^n).$$

En permutant les sommes, on a :

$$h^n A_n(h) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k \right) \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + o(h^n).$$

D'après la question précédente, les coefficients de h^k sont nuls pour $0 \leq k < n$, tandis que le coefficient de h^n est égal à $n! \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = f^{(n)}(a)$.
Il en résulte que :

$$h^n A_n(h) = f^{(n)}(a) h^n + o(h^n),$$

et donc

$$A_n(h) = f^{(n)}(a) + o(1).$$

On en déduit que $\boxed{\lim_{h \to 0} A_n(h) = f^{(n)}(a).}$

Partie III : Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers.

8. (a) Si $R = \Delta(Q)$, on a par sommation d'une série télescopique :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} R(k) = \sum_{k=0}^{p} (Q(k+1) - Q(k)) = \boxed{Q(p+1) - Q(0).}$$

(b) En utilisant la formule de la question 3.(b), on obtient :

$$\boxed{X = P_1(X); \quad X^2 = 2P_2(X) + P_1(X); \quad X^3 = 6P_3(X) + 6P_2(X) + P_1(X).}$$

Comme $\Delta(P_{n+1}) = P_n$, on a finalement :

$$\boxed{X = \Delta(P_2)(X); \quad X^2 = \Delta(2P_3 + P_2)(X); \quad X^3 = \Delta(6P_4 + 6P_3 + P_2)(X).}$$

(c) En appliquant les deux questions précédentes, on obtient pour tout $p \in \mathbb{N}$, compte tenu de la nullité en 0 des polynômes P_1, P_2, P_3, P_4 :

$$\sum_{k=0}^{p} k = P_2(p+1) = \boxed{\frac{p(p+1)}{2}.}$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^2 = 2P_3(p+1) + P_2(p+1) = \boxed{\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}.}$$

$$\sum_{k=0}^{p} k^3 = 6P_4(p+1) + 6P_3(p+1) + P_2(p+1) = \boxed{\frac{p^2(p+1)^2}{4}.}$$

9. (a) Par linéarité de la dérivation,

$$(\Delta(P))'(X) = (P(X+1) - P(X))' = P'(X+1) - P'(X) = \Delta(P')(X).$$

On a bien que $\boxed{(\Delta(P))' = \Delta(P').}$

(b) Supposons qu'une telle suite de polynômes (B_n) existe. Alors :

- en évaluant en 0, $\Delta(B_{n+1})(0) = \boxed{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = 0}$ pour $n \geq 1$.
- en dérivant,

$$\Delta(B'_{n+1}) = (\Delta(B_{n+1}))' = (X^n)' = nX^{n-1} = n\Delta(B_n).$$

Par linéarité de Δ, ceci équivaut à dire que $\boxed{B'_{n+1} - nB_n \text{ appartient à } \mathrm{Ker}(\Delta).}$

- la relation $\Delta(B_1) = 1 = \Delta(X)$ implique que $B_1 - X \in \mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbb{R}_0[X]$ et donc $\boxed{B_1(X) = X + c_1 \text{ avec } c_1 \in \mathbb{R}.}$

(c) Supposons ces trois conditions vérifiées, et montrons par récurrence que $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.

I Comme $B_1(X) = X + c_1$ avec $c_1 \in \mathbb{R}$, on a $\Delta(B_1) = 1$.

H Soit $n \geq 1$. Supposons que $\Delta(B_n) = X^{n-1}$.
La condition $B'_{n+1} - nB_n \in \mathrm{Ker}(\Delta)$ implique $\Delta(B'_{n+1}) = n\Delta(B_n)$.
Comme $(\Delta(P))' = \Delta(P')$, ceci s'écrit aussi $(\Delta(B_{n+1}))' = n\Delta(B_n)$.
Par hypothèse de récurrence, $\Delta(B_n) = X^{n-1}$, donc $(\Delta(B_{n+1}))' = nX^{n-1}$.
On obtient enfin par intégration $\Delta(B_{n+1}) = X^n + c_n$ avec $c_n \in \mathbb{R}$.
La condition $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0) \Leftrightarrow \Delta(B_{n+1})(0) = 0$ implique que $c_n = 0$ et donc $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.

On conclut par principe de récurrence.

10. (a) D'après la condition (1), $\forall n \geq 1$, $B'_{n+1} = nB_n$. Ainsi, la condition (2) équivaut à :

$$\forall n \geq 1, \quad B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = n\int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{ou encore} \quad \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Ainsi, $\boxed{\text{les conditions (1), (2) et (3) sont équivalentes aux conditions (A), (B) et (C).}}$

(b) On a donc $B_1(X) = X + c_1$, où $c_1 \in \mathbb{R}$.

La condition (B) équivaut alors à $\displaystyle\int_0^1 (t + c_1)\mathrm{d}t = 0$, soit $c_1 = -\dfrac{1}{2}$.

On en déduit que : $\boxed{B_1(X) = X - \frac{1}{2}.}$

Comme $B'_2(X) = B_1(X) = X + c_1$, on a $B_2(X) = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + c_2$, où $c_2 \in \mathbb{R}$.

La condition (B) équivaut alors à $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + c_2\right) \mathrm{d}t = 0$, soit $c_2 = \dfrac{1}{6}$.

On en déduit que : $\boxed{B_2(X) = \dfrac{X^2}{2} - \dfrac{X}{2} + \dfrac{1}{6}.}$

Comme $B_3'(X) = 2B_2(X)$, on a $B_3(X) = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X}{6} + c_3$, où $c_3 \in \mathbb{R}$.

La condition (B) équivaut alors à $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{6} + c_3\right) \mathrm{d}t = 0$, soit $c_3 = 0$.

On en déduit que : $\boxed{B_3(X) = \dfrac{X^3}{3} - \dfrac{X^2}{2} + \dfrac{X}{6}.}$

Comme $B_4'(X) = 3B_3(X)$, on a $B_4(X) = \dfrac{X^4}{4} - \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{X^2}{4} + c_4$, où $c_4 \in \mathbb{R}$.

La condition (B) équivaut alors à $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4} + c_4\right) \mathrm{d}t = 0$, soit $c_4 = -\dfrac{1}{30}$.

On en déduit que : $\boxed{B_4(X) = \dfrac{X^4}{4} - \dfrac{X^3}{2} + \dfrac{X^2}{4} - \dfrac{1}{30}.}$

Comme $\Delta(B_{n+1}) = X^n$, la formule 8.(a) implique alors :

$$\sum_{k=0}^{p} k = B_2(p+1) - B_2(0) = \boxed{\frac{p(p+1)}{2},}$$
$$\sum_{k=0}^{p} k^2 = B_3(p+1) - B_3(0) = \boxed{\frac{p(p+1)(2p+1)}{6},}$$
$$\sum_{k=0}^{p} k^3 = B_4(p+1) - B_4(0) = \boxed{\frac{p^2(p+1)^2}{4}.}$$

(c) L'existence et l'unicité de la suite (B_n) se généralisent comme suit par récurrence.

I La propriété est démontrée au rang 1, 2, 3 et 4 avec la question précédente.

H Soit $n \geq 1$. Supposons obtenu B_n (nécessairement de degré n avec la condition (A)). On décompose B_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} X^k.$$

Comme $B_{n+1}' = nB_n$, on en déduit que :

$$B_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{np_{n,k}}{k+1} X^{k+1} + c_{n+1}.$$

La condition (B) équivaut alors à $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{np_{n,k}}{k+1} t^{k+1} + c_{n+1}\right) \mathrm{d}t = 0$, soit :

$$c_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} \frac{np_{n,k}}{(k+1)(k+2)}.$$

Le polynôme B_{n+1} vérifiant les conditions requises est ainsi déterminé de manière unique, et on observera que ses coefficients sont rationnels.

(d) On peut ranger les coefficients des polynômes B_k $(1 \leq k \leq n)$ dans un tableau $(p_{i,j})$ de taille $n \times n$ dont les éléments auront été initialisés à 0.

Dans la première ligne, on prend $p_{1,0} = -\dfrac{1}{2}$ et $p_{1,1} = 1$ puisque $B_1(X) = X - \dfrac{1}{2}$.
Puis les formules obtenues à la question précédente permettent de remplir successivement les lignes 2 à n du tableau avec les coefficients de $B_2, \ldots, B_n$.
Bien entendu, une programmation de ces opérations en rationnels (et non en flottants) permettra d'obtenir les coefficients de ces polynômes sous forme rationnelle.
