DM 16

A rendre le 02/06/26

Exercice 1

On désigne dans la suite par $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par Δ l'opérateur de différences finies, qui est défini sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

Pour tout entier naturel k, on pose $\Delta^k = Id$ si $k = 0$ et $\Delta^k = \Delta \circ \Delta \circ ... \circ \Delta$ (k fois) si $k \geq 1$.

Ce problème propose l'étude de cet endomorphisme Δ et de certaines de ses applications.

Partie I : Étude de l'endomorphisme Δ.

On définit la famille de polynômes réels $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et par les relations suivantes :

$$\forall n \geq 1,\ P_n(X) = \frac{1}{n!}X(X-1)...(X-n+1) = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k).$$

1. *Étude de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
   (a) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Établir, pour tous entiers naturels k et n, que $P_n(k)$ et que $P_n(-k)$ sont des entiers.
   (c) En déduire, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, que les coefficients de P dans la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$ sont des nombres entiers si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.

2. *Étude de l'endomorphisme Δ.*
   (a) Établir que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Calculer $\Delta(P_0)$, puis $\Delta(P_{n+1})$ en fonction de P_n pour $n \in \mathbb{N}$.
   (c) On considère un polynôme non nul P de degré d.
   Préciser le degré du polynôme $\Delta(P)$ et donner $\Delta^{d+1}(P)$.
   (d) Préciser le noyau de Δ, puis étudier s'il est injectif et s'il est surjectif.

3. *Expression d'un polynôme dans la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.*
   (a) Calculer $\Delta^i(P_j)$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$.
   En déduire que $\Delta^i(P_j)(0) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
   (b) En déduire, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, la formule suivante :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0)P_k(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Delta^k(P)(0)}{k!} X(X-1)\dots(X-k+1).$$

Partie II : Approximation de dérivées n-ième par différences finies.

4. *Puissances de l'endomorphisme Δ.*
   Établir la formule suivante pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n(P)(X) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}(-1)^{n-j}P(X+j).$$

5. *Application au calcul de différentes sommes.*

   (a) Préciser le coefficient dominant du polynôme X^n dans la base $(P_0, P_1, ..., P_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire la valeur de $\Delta^n(X^n)$, puis établir la formule suivante :

   $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^n = n!.$$

   (b) Démontrer la formule suivante pour $0 \leq k < n$:

   $$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} j^k = 0.$$

6. *Approximation d'une dérivée n-ième par différences finies.*

   On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^m$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, un point $a \in \mathbb{R}$ et un entier naturel $n \in [\![1, m]\!]$. On pose alors :

   $$\forall h \in \mathbb{R}^*, \quad A_n(h) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (-1)^{n-j} f(a + jh).$$

   (a) Exprimer $f(a+h)$ à l'aide de la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre n en a. Quelles formules en déduit-on pour $f(a + jh)$, où $0 \leq j \leq n$, en changeant h en jh ?

   (b) En déduire que l'expression $h^n A_n(h)$ admet un développement limité à l'ordre n quand h tend vers 0, et préciser les coefficients de h^j pour $j \in [\![0, n-1]\!]$ et de h^n dans celui-ci. Quelle est la limite de $A_n(h)$ quand h tend vers 0 ?

Partie III : Calcul de la somme des puissances des n premiers entiers.

8. *Étude de sommes télescopiques.*

   (a) Établir la formule suivante pour $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $R = \Delta(Q)$:

   $$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{p} R(k) = Q(p+1) - Q(0).$$

   (b) Exprimer les polynômes X, X^2 et X^3 à l'aide des polynômes P_1, P_2, P_3.
   En déduire des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 tels qu'on ait $\Delta(Q_1)(X) = X$, $\Delta(Q_2)(X) = X^2$, $\Delta(Q_3)(X) = X^3$.

   (c) Donner alors l'expression factorisée des sommes $\sum_{k=0}^{p} k$, $\sum_{k=0}^{p} k^2$, $\sum_{k=0}^{p} k^3$ où $p \in \mathbb{N}$.

9. *Recherche d'une suite de polynômes (B_n) tels que $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.*

   Afin de généraliser le calcul précédent, on recherche une suite de polynômes $(B_n)_{n \geq 1}$ tels qu'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\Delta(B_{n+1}) = X^n$.

   (a) Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $(\Delta(P))' = \Delta(P')$.

   (b) Établir, si une telle suite de polynômes (B_n) existe, qu'on a :
   - $\forall n \geq 1$, $B'_{n+1} - nB_n \in \mathrm{Ker}(\Delta)$;
   - $\forall n \geq 1$, $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;
   - le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

(c) Inversement, établir par récurrence qu'une suite (B_n) satisfaisant ces trois conditions vérifie $\Delta(B_{n+1}) = X^n$, et qu'on a alors

$$\sum_{k=0}^{p} k^n = B_{n+1}(p+1) - B_{n+1}(0)$$

pour tout entier naturel p.

10. *Existence, unicité et construction de la suite* (B_n).

On recherche une suite de polynômes (B_n) vérifiant les conditions suivantes :

(1) $\forall n \geq 1,\ B'_{n+1} = nB_n$;

(2) $\forall n \geq 1,\ B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0)$;

(3) le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

(a) Vérifier que les conditions (1), (2), (3) sont équivalentes aux conditions suivantes :

(A) $\forall n \geq 1,\ B'_{n+1} = nB_n$;

(B) $\forall n \geq 1,\ \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0$;

(C) le polynôme B_1 est unitaire et de degré 1.

(b) Déterminer les polynômes B_1, B_2, B_3, B_4 et retrouver ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} k^3$.

(c) Établir alors l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifie les trois conditions (A), (B), (C) définies ci-dessus, et montrer qu'on a : $\forall n \geq 1,\ B_n \in \mathbb{Q}[X]$.

(d) En déduire un algorithme d'obtention des polynômes B_k pour $1 \leq k \leq n$, où n est donné.
