Correction - DM 7

A rendre le 12/12/25

Exercice 1

1. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons L_f injective. Soit $(x,y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$.
Posons $\varphi : E \to E$ la fonction constante égale à x et $\phi : E \to E$ la fonction constante égale à y. Alors pour tout $a \in E$:
$$(f \circ \varphi)(a) = f(\varphi(a)) = f(x) = f(y) = f(\phi(a)) = (f \circ \phi)(a).$$
Ainsi $f \circ \varphi = f \circ \phi$, c'est-à-dire $L_f(\varphi) = L_f(\phi)$. Comme L_f est injective, on en déduit que $\varphi = \phi$ et donc, pour $a \in E$!
$$x = \varphi(a) = \phi(a) = y.$$
Donc $\boxed{f \text{ est injective.}}$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f injective. Montrons que L_f est aussi injective. Soit pour cela $(\varphi, \phi) \in \mathscr{F}(E,E)^2$ tel que $L_f(\varphi) = L_f(\phi)$. Alors $f \circ \varphi = f \circ \phi$, d'où pour tout $x \in E$:
$$(f \circ \varphi)(x) = (f \circ \phi)(x), \quad \text{donc} \quad f(\varphi(x)) = f(\phi(x)).$$
Comme f est injective, ceci donne $\varphi(x) = \phi(x)$. Ainsi $\varphi = \phi$ et $\boxed{L_f \text{ est injective.}}$
En conclusion, $\boxed{L_f \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est injective.}}$

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons L_f surjective. Montrons que f est surjective.
Soit pour cela $y \in E$. Notons $\varphi : E \to E$ l'application constante égale à y. Comme L_f est surjective, il existe $\phi \in \mathscr{F}(E,E)$ tel que $f \circ \phi = L_f(\phi) = \varphi$. Mais alors, pour $a \in E$ quelconque :
$$(f \circ \phi)(a) = \varphi(a) = y, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(\phi(a)) = y.$$
Ainsi, y admet au moins un antécédent par f, à savoir $\phi(a)$. Donc $\boxed{f \text{ est surjective.}}$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f surjective. Montrons qu'alors L_f est surjective.
Soit $\varphi \in \mathscr{F}(E,E)$. Pour tout $y \in E$, $\varphi(y) \in E$ admet un antécédent par f dans E (par surjectivité de f) que l'on note x_y. Posons alors :
$$\phi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ y & \mapsto & x_y \end{array}.$$
Par définition, pour tout $y \in E$:
$$(f \circ \phi)(y) = f(\phi(y)) = f(x_y) = \varphi(y).$$
Donc $f \circ \phi = \varphi$, soit $L_f(\phi) = \varphi$. Ainsi $\boxed{L_f \text{ est surjective.}}$
En conclusion, $\boxed{L_f \text{ est surjective si et seulement si } f \text{ est surjective.}}$

2. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ On raisonne par contraposition. Supposons que g n'est pas surjective[1]. Considérons alors a, b deux éléments distincts de E et :
$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & a \end{array} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} a & \text{si } x \in \mathrm{Im}(g) \\ b & \text{si } x \notin \mathrm{Im}(g) \end{cases} \end{array}.$$

[1]Cela implique notamment que E n'est pas réduit à un élément, car sinon g serait l'identité qui est surjective. Cela nous servira dans la suite du raisonnement.

Alors $\varphi_1 \neq \varphi_2$ (on utilise ici que $\mathrm{Im}(g) \neq E$), et pour tout $x \in E$:

$$\varphi_1 \circ g(x) = a = \varphi_2 \circ g(x)$$

de sorte que $R_g(\varphi_1) = R_g(\varphi_2)$. Ainsi, R_g n'est pas injective.

On a donc montré que si $\boxed{R_g \text{ injective, alors } g \text{ est surjective.}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons g surjective. Montrons que R_g est injective.

Soient pour cela φ_1 et φ_2 des applications de E dans E telles que :

$$\varphi_1 \circ g = R_g(\varphi_1) = R_g(\varphi_2) = \varphi_2 \circ g.$$

Montrons que $\varphi_1 = \varphi_2$. Soit pour cela $y \in E$. Par surjectivité de g, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Mais alors :

$$\varphi_1(y) = \varphi_1(g(x)) = \varphi_1 \circ g(x) = \varphi_2 \circ g(x) = \varphi_2(g(x)) = \varphi_2(y).$$

Donc $\varphi_1 = \varphi_2$ et $\boxed{R_g \text{ est injective.}}$

En conclusion, $\boxed{R_g \text{ est injective si et seulement si } g \text{ est surjective.}}$

(b) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons R_g surjective. Montrons que g est injective.

Par hypothèse, il existe $\varphi : E \to E$ telle que :

$$\varphi \circ g = R_g(\varphi) = \mathrm{id}_E.$$

Puisque id_E est injective, $\boxed{g \text{ est donc injective.}}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons g injective. Montrons que R_g est surjective.

Soit pour cela $\psi : E \to E$ une application. On cherche à construire une application $\varphi : E \to E$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad \psi(x) = \varphi \circ g(x).$$

Pour cela, notons $\tilde{g} = g^{|\mathrm{Im}(g)}$. Cette application est injective (car g l'est) et est surjective (car corestreinte à $\mathrm{Im}(g)$). Elle est donc bijective de E sur $\mathrm{Im}(g)$. On définit alors :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & \begin{cases} \psi \circ (\tilde{g})^{-1}(x) & \text{si } x \in \mathrm{Im}(g) \\ x & \text{si } x \notin \mathrm{Im}(g) \end{cases} \end{array}.$$

Vérifions que φ convient. Prenons pour cela $x \in E$ et calculons :

$$\varphi \circ g(x) = \varphi(g(x) \underbrace{=}_{g(x) \in \mathrm{Im}(g)} \psi \circ (\tilde{g})^{-1}(g(x)) = \psi(x)$$

car x est l'unique antécédent de $g(x)$ par g. Ainsi $\psi = R_g(\varphi)$, et $\boxed{R_g \text{ est surjective.}}$

En conclusion, $\boxed{R_g \text{ est surjective si et seulement si } g \text{ est injective.}}$

3. D'après les deux questions précédentes, L_f et $R_{f^{-1}}$ sont bijectives car f et f^{-1} sont bijectives. Plus précisément, on vérifie aisément que :

$$L_f \circ L_{f^{-1}} = L_{f^{-1}} \circ L_f = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(E,E)} \quad \text{et que} \quad R_f \circ R_{f^{-1}} = R_{f^{-1}} \circ R_f = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(E,E)}.$$

Ainsi, $(L_f)^{-1} = L_{f^{-1}}$ et $(R_{f^{-1}})^{-1} = R_f$. Donc $\Phi_f = L_f \circ R_{f^{-1}}$ est bijective et

$$(\Phi_f)^{-1} = (L_f \circ R_{f^{-1}})^{-1} = (R_{f^{-1}})^{-1} \circ (L_f)^{-1} = R_f \circ L_{f^{-1}} = \Phi_{f^{-1}}.$$

Exercice 2

Partie I. Exemples d'ensembles dénombrables.

1. Montrons que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. Il s'agit de trouver une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$. Prenons :
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}.$$
On vérifie sans peine que f est bijective en montrant par exemple qu'avec $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n-1 \end{array}$, on obtient :
$$g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{N}^*}.$$
Donc $\boxed{\mathbb{N}^* \text{ est dénombrable.}}$

   Montrons que $\mathscr{P} = \{2k,\, k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. Considérons pour cela l'application
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathscr{P} \\ k & \mapsto & 2k \end{array}.$$
On vérifie de même que h est bijective, en montrant par exemple que pour $i : \begin{array}{ccc} \mathscr{P} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n/2 \end{array}$, on obtient :
$$i \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad h \circ i = \mathrm{id}_{\mathscr{P}}.$$
Donc $\boxed{\mathscr{P} \text{ est dénombrable.}}$

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, deux cas sont possibles :
   - soit n est pair, et dans ce cas $\dfrac{n}{2}$ est bien un entier ;
   - soit n est impair, et dans ce cas $\dfrac{n+1}{2}$ est bien un entier également.

   Dans tous les cas, $\varphi(n)$ appartient à $\mathbb{Z}$, et $\boxed{\varphi \text{ est bien définie.}}$

   (b) Montrons que φ est bijective.
   - **Injectivité.** Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\varphi(n_1) = \varphi(n_2)$. Deux cas sont possibles :
     - si $\varphi(n_1) = \varphi(n_2) \leq 0$, alors n_1 et n_2 sont tous les deux pair par définition de φ, et :
$$\frac{n_1}{2} = \varphi(n_1) = \varphi(n_2) = \frac{n_2}{2} \quad \text{d'où} \quad n_1 = n_2.$$
     - si $\varphi(n_1) = \varphi(n_2) < 0$, alors n_1 et n_2 sont tous les deux impair, et donc :
$$-\frac{n_1+1}{2} = \varphi(n_1) = \varphi(n_2) = -\frac{n_2+1}{2}, \quad \text{d'où} \quad n_1 = n_2.$$

     Dans tous les cas, on obtient bien que $n_1 = n_2$. Donc φ est bien injective.
   - **Surjectivité.** Soit $k \in \mathbb{Z}$. Deux cas sont là aussi à envisager :
     - si $k \geq 0$, alors $n = 2k$ convient puisque $\varphi(2k) = \dfrac{2k}{2} = k$;
     - si $k < 0$, alors $n = -2k-1 \in \mathbb{N}$ convient puisque $\varphi(-2k-1) = -\dfrac{-2k-1+1}{2} = k$.

     Ainsi, φ est bien surjective.

   L'application $\boxed{\varphi \text{ est injective et surjective, donc bijective.}}$

   Il existe donc bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$: $\boxed{\mathbb{Z} \text{ est dénombrable.}}$

3. (a) Montrons que l'application ψ est injective. Soient pour cela (p_1, q_1) et $(p_2, q_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\psi(p_1, q_1) = \psi(p_2, q_2)$. Alors :

$$2^{p_1}(2q_1 + 1) = 2^{p_2}(2q_2 + 1).$$

Quitte à renuméroter, on peut supposer par exemple que $p_1 \geq p_2$. On obtient l'égalité d'entiers

$$2^{p_1 - p_2}(2q_1 + 1) = (2q_2 + 1).$$

Ainsi $2^{p_1-p_2}(2q_1 + 1)$ est un entier impair. Donc nécessairement $p_1 - p_2 = 0$, et donc $p_1 = p_2$. En reprenant l'égalité ci-dessus, on obtient alors en substituant que $q_1 = q_2$. Donc $\boxed{\psi \text{ est bien injective.}}$

(b) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: ¡¡ il existe $(p, q) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p(2q+1)$ ¿¿ pour tout $n \geq 1$.

$\boxed{\textbf{I}}$ Pour $n = 1$, le couple $(p, q) = (0, 0)$ convient. Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $n \geq 1$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. Montrons $\mathscr{P}(n + 1)$.

Deux cas sont possibles :

- si $n + 1$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k + 1$. Le coupe $(p, q) = (0, k)$ convient.
- si $n + 1$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2k$. Par hypothèse de récurrence, il existe $(p', q') \in \mathbb{N}^2$ tels que $k = 2^{p'}(2q' + 1)$. Alors $n + 1 = 2^{p'+1}(2q' + 1)$, et le coupe $(p, q) = (p' + 1, q')$ convient.

Dans tous les cas, la propriété $\mathscr{P}(n + 1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, pour tout $n \geq 1$, il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q + 1)$.

En particulier, $\boxed{\psi \text{ est surjective.}}$

(c) L'application ψ est injective et surjective. C'est donc une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^*$. Et on a donné à la question 1 une bijection g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$. Par composition, $\Psi = \psi \circ g$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. Ainsi $\boxed{\mathbb{N}^2 \text{ est bien dénombrable.}}$

4. (a) L'application $j : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{Q} \\ n & \mapsto & n \end{array}$ est clairement une $\boxed{\text{injection de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{Q}.}$

(b) Montrons que ϕ est injective : soient pour cela $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$, et $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$, $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ leurs représentants irréductibles. Supposons que $\phi(r_1) = \phi(r_2)$. Alors :

$$(p_1, q_1) = (p_2, q_2), \text{ d'où } p_1 = p_2 \text{ et } q_1 = q_2 \text{ et donc } r_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2} = r_2.$$

Donc $\boxed{\phi \text{ est injective.}}$

ϕ n'est pas surjective : par exemple $(2, 2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, mais $(2, 2)$ n'a pas d'antécédent par ϕ : sinon il existerait r tel que $\phi(r) = (2, 2)$, et alors $r = \frac{2}{2} = 1$. Or l'écriture irréductible de 1 est $\frac{1}{1}$, de sorte que $\phi(1) = (1, 1) \neq (2, 2)$, d'où une contradiction.

(c) On a déjà une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il nous suffit donc de déterminer une injection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$: on aura alors une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$ en composant.

On a explicité dans les questions précédentes :

- une bijection g de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$;
- une bijection φ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$;
- une bijection Ψ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

Considérons alors l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ (k,n) & \mapsto & (\varphi(k), g(n)) \end{array}$. Montrons que Φ est bijective. Soient pour cela $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$ et $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \Phi(k_1,k_2) = (n_1,n_2) &\Leftrightarrow (\varphi(k_1), g(k_2)) = (n_1,n_2) \\ &\Leftrightarrow \varphi(k_1) = n_1 \text{ et } g(k_2) = n_2 \\ &\Leftrightarrow k_1 = \varphi^{-1}(n_1) \text{ et } k_2 = g^{-1}(n_2). \end{aligned}$$

Ainsi tout élément de l'ensemble $\mathbb{N}^2$ admet un unique antécédent dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ par Φ. Donc $\boxed{\Phi \text{ est bijective.}}$

Finalement, on dispose des applications suivantes :

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \xrightarrow{\Phi} \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\Psi} \mathbb{N}$$

et toutes ces applications sont injectives. Par composition, on obtient une $\boxed{\text{injection de } \mathbb{Q} \text{ dans } \mathbb{N}.}$

(d) On a donc construit une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$, puis une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Par le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$. Donc $\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$

Pour aller plus loin.

Il est assez facile de prouver que (et on l'a constaté sur les questions précédentes) :

- tout ensemble est équipotent à lui-même ;
- si E est équipotent à F, alors F est équipotent à E ;
- si E est équipotent à F et si F est équipotent à G, alors E est équipotent à G.

Nous sommes donc tentés de dire que l'équipotence est une relation d'équivalence. Mais sur quel ensemble ? Sur l'ensemble de tous les ensembles ? Le problème est qu'un tel ensemble n'existe pas : c'est le paradoxe de Russel évoqué au chapitre 11 sur les ensembles.

Bref, l'équipotence possède toutes les propriétés d'une relation d'équivalence, mais on n'a pas le droit de dire que c'en est une. Notons que la classe d'équivalence d'un ensemble E, si elle existait, ne serait rien d'autre que l'ensemble des ensembles équipotents à E. Autrement dit, de même ¡¡ taille ¿¿ que E. Par exemple :

- pour E fini, la classe de E contiendrait tous les ensembles de même cardinal que E.
- la classe de $\mathbb{N}$ serait celle de tous les ensembles dénombrables. Elle contiendrait notamment $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ d'après la première partie.

Une notion plus rigoureusement définie, qu'on peut interpréter comme ces classes d'équivalence, est la notion de cardinal. Mais il faut un cours avancé de théorie des ensembles pour bien l'appréhender.

Partie II. Exemples d'ensembles non dénombrables.

5. (a) Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un ensemble E et une surjection $f : E \to \mathscr{P}(E)$. Soit alors $A = \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Alors A ne peut pas posséder d'antécédent par f. En effet, s'il existe $x \in E$ tel que $f(x) = A$, alors :
   - soit $x \in A$, et donc $x \in f(x)$, donc $x \notin A$: absurde ;
   - soit $x \notin A$, et donc $x \notin f(x)$, donc $x \in A$: absurde.

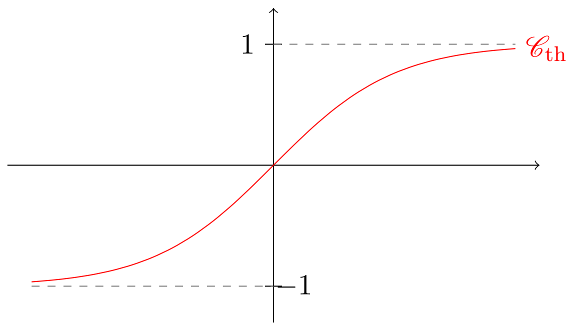
   Ainsi, $\boxed{\text{il n'existe pas de surjection de } E \text{ sur } \mathscr{P}(E).}$

(b) Par la question précédente, il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, et a fortiori pas de bijection non plus. Ainsi, $\boxed{\mathscr{P}(\mathbb{N}) \text{ n'est pas dénombrable.}}$

Pour aller plus loin.

> Une autre conséquence de ce résultat est l'existence d'une infinité de cardinaux infinis. En effet, E s'injecte dans $\mathscr{P}(E)$ par l'application $x \in E \mapsto \{x\} \in \mathscr{P}(E)$. Mais on vient de voir qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathscr{P}(E)$. Ainsi, $\mathscr{P}(E)$ a un cardinal ¡¡ strictement plus grand ¿¿ que celui de E. En partant de $E = \mathbb{N}$ et par itération de ce procédé, on peut alors construire une suite d'ensembles dont les cardinaux croissent strictement.

6. (a) Rappelons que la fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x)^2} > 0$), et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.



Considérons alors $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}(\mathrm{th}(x) + 1) \end{array}$. On vérifie à partir des propriétés connues sur th que f est strictement croissante, continue et que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$. Ainsi, $\boxed{\mathbb{R} \text{ et }]0,1[\text{ sont équipotents.}}$

D'une part, $]0, 1[$ s'injecte dans $[0, 1]$ par l'application $x \mapsto x$. Par composition, $\mathbb{R}$ s'injecte donc dans $[0, 1]$. Et inversement, l'application $x \mapsto x$ définie une injection de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Par le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\mathbb{R} \text{ et } [0,1] \text{ sont équipotents.}}$

(b) i. Montrons que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \subset I_n$ par construction, de sorte que $a_{n+1}, b_{n+1} \in I_n$ dont les bornes sont a_n et b_n. D'où $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$. Les suites (a_n) et (b_n) sont donc croissantes et décroissantes respectivement.
- Si on note $\ell_n = b_n - a_n$ la longueur de l'intervalle I_n, alors $\ell_{n+1} = \dfrac{\ell_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n - a_n = \ell_n = \frac{\ell_0}{3^n} = \frac{1}{3^{n+1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Les suites $\boxed{(a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont donc adjacentes.}}$

ii. Par théorème des suites adjacentes, les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ qui satisfait $0 \leq a_0 \leq \ell \leq b_0 \leq 1$. Comme par hypothèse, $\varphi : \mathbb{N} \to [0, 1]$ est bijective, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(m) = \ell$. Mais par construction, $\varphi(m)$ n'est pas dans I_m et n'est pas une borne de I_m, alors que $a_m \leq \ell \leq b_m$. D'où une contradiction.

Ainsi, il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $[0, 1]$. Puisque $[0, 1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$, il n'existe pas non plus de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$: $\boxed{\mathbb{R} \text{ n'est donc pas dénombrable.}}$

Pour aller plus loin.

Bien évidemment, $\mathbb{N}$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ par l'application $n \mapsto n$. Puisque $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas en bijection, $\mathbb{R}$ a donc un cardinal ¡¡ strictement plus grand ¿¿ que $\mathbb{N}$. On peut plus précisément montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents, et donc de même cardinal.

Georg Cantor (1845-1918) a tenté vainement de démontrer que tout sous-ensemble des réels était soit dénombrable, soit de la puissance du continu, c'est-à-dire équipotent à $\mathbb{R}$. Cette hypothèse, dite *hypothèse du continu*, ne peut en fait être ni confirmée ni infirmée dans la théorie des ensembles ZFC (résultats de 1938 de Kurt Gödel et de 1963 de Paul Cohen) : elle est indépendante des axiomes ZFC, ou dit autrement, elle est indécidable dans cette théorie.

Partie III. Nombres irrationnels, nombres algébriques, nombres transcendants.

7. (a) Notons $F_1 = E_1$ et $F_2 = E_2 \setminus E_1$, de sorte que $E_1 \cup E_2 = F_1 \sqcup F_2$ avec F_1 et F_2 disjoints. Remarquons alors que :
   - F_1 est au plus dénombrable puisque E_1 l'est ;
   - F_2 est également au plus dénombrable, puisque si $\varphi : E_2 \to \mathbb{N}$ est injective, alors $\varphi_{|F_2} : F_2 \to \mathbb{N}$ est également injective ;
   - pour tout $x \in E_1 \cup E_2$, on a $x \in F_1$ ou $x \in F_2$, les deux ne pouvant se produire simultanément.

   Notons alors $\varphi_1 : F_1 \to \mathbb{N}$ et $\varphi_2 : F_2 \to \mathbb{N}$ deux injections, et soit $f : E_1 \cup E_2 \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par :

   $$\forall x \in E_1 \cup E_2, \quad \varphi(x) = \begin{cases} (0, \varphi_1(x)) & \text{si } x \in F_1, \\ (1, \varphi_2(x)) & \text{si } x \in F_2. \end{cases}$$

   Alors φ est une injection de $E_1 \cup E_2$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, qui composée par une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ nous fournit une injection de $E_1 \cup E_2$ dans $\mathbb{N}$, de sorte que $\boxed{E_1 \cup E_2 \text{ est au plus dénombrable.}}$

   Pour une union finie, il suffit ensuite de faire une récurrence sur le nombre d'ensembles.

   (b) Soient $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des ensembles au plus dénombrables, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\varphi_n : E_n \to \mathbb{N}$ une injection.

   Pour $x \in \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$, posons $i(x) = \min(\{k \in \mathbb{N} \mid x \in E_k\})$. Définissons alors l'application :

   $$\varphi : \begin{array}{ccc} \displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n & \to & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ x & \mapsto & (i(x), \varphi_{i(x)}(x)) \end{array}.$$

   Alors il est aisé de constater que φ est injective, et donc composée avec une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nous fournit une injection de $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ sur $\mathbb{N}$. Ainsi, $\boxed{\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \text{ est au plus dénombrable.}}$

8. Raisonnons par l'absurde en supposant $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ au plus dénombrable. Puisque nous avons montré que $\mathbb{Q}$ est (au plus) dénombrable, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ serait au plus dénombrable en tant que union finie de tels ensembles, ce qui est faux d'après la question 6. Donc $\boxed{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ est non dénombrable.}}$

9. Choisir une fonction polynomiale de degré k à coefficients entiers, c'est choisir $k+1$ éléments de $\mathbb{Z}$ (par unicité de l'écriture d'une fonction polynomiale). Donc l'ensemble des fonctions polynomiales de degré k à coefficients entiers est équipotent à $\mathbb{Z}^{k+1}$. Mais $\mathbb{Z}$ étant équipotent à $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^{k+1}$ est équipotent à $\mathbb{N}^{k+1}$, qui est lui-même équipotent à $\mathbb{N}$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé. Notons $i \mapsto P_{i,k}$ une bijection entre $\mathbb{N}$ et l'ensemble des fonctions polynomiales de degré k à coefficients entiers.

Pour P une fonction polynomiale non nul, notons $\mathscr{C}(P)$ l'ensemble des racines réelles, qui est fini et donc au plus dénombrable.

L'ensemble des nombres algébriques peut s'écrire $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{C}(P_{i,k})\right)$. Mais par la question 7.(b), à k fixé, $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{C}(P_{i,k})$ est au plus dénombrable. Et donc $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{C}(P_{i,k})\right)$. est également au plus dénombrable.

Ainsi, il existe une injection de l'ensemble des algébriques dans $\mathbb{N}$. Puisque $n\mapsto n$ est une injection de $\mathbb{N}$ dans l'ensemble des algébriques, par le théorème de Cantor-Bernstein, $\boxed{\text{l'ensemble des nombres algébriques est équipotent à } \mathbb{N}.}$

11. Puisque $\mathbb{R}$ n'est lui pas équipotent à $\mathbb{N}$, et qu'un réel est soit algébrique, soit transcendant, $\mathbb{R}$ n'est pas égal à l'ensemble des algébriques : $\boxed{\text{il existe des nombres transcendants.}}$

    De plus, l'ensemble des nombres transcendants ne saurait être au plus dénombrable, car alors $\mathbb{R}$ serait l'union de deux ensembles au plus dénombrables et donc serait lui-même au plus dénombrable d'après la question 7.(a). Ce qui est faux d'après la question 6.

Liens utiles.

- *Sur la route de l'infini*, Voyage au pays des maths, ARTE.
- *L'infini*, ScienceEtonnante.
- *L'hôtel de Hilbert*, Deux (deux ?) minutes pour..., El Jj.