DM 7

# A rendre le 12/12/25

## Exercice 1

Soient $E$ un ensemble et $f, g$ deux applications de $E$ dans $E$. On pose :

$$L_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E,E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,E) \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array} \right. \quad \text{et} \quad R_g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E,E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,E) \\ \varphi & \longmapsto & \varphi \circ g \end{array} \right. .$$

1. Montrer que :
   - (i) $L_f$ est injective si, et seulement si, $f$ est injective ;
   - (ii) $L_f$ est surjective si, et seulement si, $f$ est surjective.
2. Montrer de même que :
   - (i) $R_g$ est injective si, et seulement si, $g$ est surjective ;
   - (ii) $R_g$ est surjective si, et seulement si, $g$ est injective.
3. Soit $f$ une bijection. On appelle *conjugaison par $f$* l'application :

$$\Phi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(E,E) & \longrightarrow & \mathscr{F}(E,E) \\ \varphi & \longmapsto & f \circ \varphi \circ f^{-1} \end{array} \right. .$$

   Montrer que $\Phi_f$ est bijective, et déterminer sa bijection réciproque.

---

## Exercice 2

Deux ensembles $E$ et $F$ sont dits *équipotents* s'il existe une bijection de $E$ sur $F$ (ou, ce qui est équivalent, une bijection de $F$ sur $E$).

L'idée derrière cette définition est que deux ensembles équipotents sont ¡¡ de la même taille ¿¿, puisqu'à tout élément de l'un correspond un unique élément de l'autre.

Un ensemble $E$ est dit *dénombrable* s'il existe une bijection entre l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $E$.

On admettra dans la suite le résultat suivant.

> **Théorème de Cantor-Bernstein.**
> Soient $E$ et $F$ deux ensembles tels qu'il existe une injection de $E$ sur $F$ et une injection de $F$ sur $E$, alors il existe une bijection de $E$ sur $F$.

### Partie I. Exemples d'ensembles dénombrables

1. Montrer que les ensembles $\mathbb{N}^*$ et $\mathscr{P} = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ sont dénombrables.
2. Dans cette question, on souhaite montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable. On introduit pour cela l'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\varphi(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

   (a) Montrer que l'application $\varphi$ est bien définie.

(b) Montrer que $\varphi$ est bijective. Conclure.

3. Dans cette question, on souhaite montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Pour cela, on introduit l'application $\psi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \psi(p,q) = 2^p(2q+1).$$

(a) Montrer que l'application $\psi$ est injective.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $(p,q) \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.

(c) Conclure que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

4. Dans cette question, on souhaite établir que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

(a) Exhiber une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$.

(b) Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ qui à $r \in \mathbb{Q}$ associe le couple $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $\frac{p}{q}$ le représentant irréductible de $r$, est injective. Est-elle surjective ?

(c) Former une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$.

(d) Conclure que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

### Partie II. Ensembles non dénombrables

*La suite du problème est facultative.*

5. (a) Soit $E$ un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de $E$ sur $\mathscr{P}(E)$ (*Théorème de Cantor*).

*On pourra raisonner par l'absurde en considérant $f : E \to \mathscr{P}(E)$ surjective, et $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.*

(b) En déduire que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

6. On souhaite dans cette question montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

(a) À l'aide de la fonction th, montrer que $\mathbb{R}$ et $]0,1[$ sont équipotents. En déduire que pour tous réels $a < b$, $]a,b[$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.

(b) Supposons par l'absurde qu'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to ]0,1[$. On effectue la construction suivante :

- on partitionne $]0,1[$ en trois sous-intervalles de même longueur (par exemple $]0,1/3]$, $]1/3,2/3]$, $]2/3,1[$). Puisque $\varphi(0) \in ]0,1[$, il appartient à l'un de ces sous-intervalles et est éventuellement une borne d'un autre. Dans tous les cas, il existe un sous-intervalle $I_0$ de $]0,1[$ tel que $\varphi(0) \notin I_0$ et $\varphi(0)$ n'est pas une borne de $I_0$.
- on recommence : on divise l'intervalle $I_0$ en trois sous-intervalles de même longueur, et on note $I_1$ un sous-intervalle de $I_0$ tel que $\varphi(1)$ n'est pas dans $I_1$ et n'est pas une borne de $I_1$. Et ainsi de suite.

On construit ainsi une suite d'intervalles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n$, $\varphi(n)$ n'est pas dans $I_n$ et n'est pas une borne de $I_n$.

i. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n$ et $b_n$ les bornes de l'intervalle $I_n$. Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes. On note $\ell$ leur limite commune.

ii. Justifier l'existence d'un entier $m \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(m) = \ell$. En déduire une contradiction et conclure.

*On peut plus précisément montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.*

**Partie III. Nombres irrationnels, nombres algébriques, nombres transcendants.**

Un ensemble $E$ est dit *au plus dénombrable* s'il existe une injection de $E$ dans $\mathbb{N}$. Par exemple, un ensemble fini $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est au plus dénombrable puisqu'à chaque élément $x \in E$, on peut associer l'unique $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $x = x_i$.

*On peut montrer, mais ce n'est pas utile dans la suite, que les ensembles au plus dénombrables sont les ensembles finis ou équipotents à* $\mathbb{N}$.

7. (a) Montrer que si $E_1$ et $E_2$ sont deux ensembles au plus dénombrables, alors $E_1 \cup E_2$ est encore au plus dénombrable. En déduire qu'une union finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
   (b) Soit $E$ un ensemble, et soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $E$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n$ soit au plus dénombrable. Prouver que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est au plus dénombrable.
8. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est non dénombrable.

Un réel $\alpha$ est dit *algébrique* s'il existe une fonction polynomiale non nul $P : x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ **à coefficients dans** $\mathbb{Z}$ dont $\alpha$ est racine. Par exemple, tout rationnel $r = \dfrac{a}{b}$ est algébrique car $r$ est racine de $bX - a$.

Mais certains nombres irrationnels sont également algébriques, par exemple $\sqrt{2}$ est racine de $P : x \mapsto x^2 - 2$. Un nombre qui n'est pas algébrique est appelé *transcendant*.

9. Soit $k \in \mathbb{N}$. Prouver que l'ensemble des polynômes de degré $k$ à coefficients entiers est équipotent à $\mathbb{N}$.
10. On montrera bientôt qu'une fonction polynomiale non nulle admet un nombre fini de racines. En utilisant ce résultat, prouver que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
11. En déduire qu'il existe des nombres transcendants, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas au plus dénombrable.