Correction - DM 8

A rendre le 06/01/26

Exercice 1

1. D'une part :

$$u_n = n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

D'autre part :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right) = n^{\alpha-1}\frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)}{1/n}.$$

On reconnait un taux d'accroissement en 0 de la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Puisque f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha - 1\right)}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(1/n) - f(0)}{1/n - 0} = \lim_{X\to 0} \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} = f'(0) = \alpha.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1} = 0$. Or, ceci se réalise si, et seulement si, $\alpha - 1 < 0$, soit encore $\alpha < 1$.

Finalement, une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$ est $\boxed{0 < \alpha < 1.}$

2. Rappelons qu'une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si, et seulement si, elle vérifie la propriété :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ (a < b) \Rightarrow (\exists z \in A,\ a \leq z \leq b).$$

On suppose ici que A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc deux réels a et b tels que $a < b$ et :

$$\forall z \in A,\ z \notin [a,b],$$

cette dernière propriété se récrivant $A \cap [a,b] = \emptyset$. Posons alors $x = b$ et $\varepsilon = b - a > 0$, de sorte que $x - \varepsilon = b - (b-a) = a$ et :

$$\boxed{A \cap \,]x-\varepsilon, x] = A \cap \,]a,b] = \emptyset.}$$

3. (a) Puisque $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$, par définition de la limite appliquée à $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

   (b) Par opération sur les limites, $u_{n_0} - v_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui se récrit :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ (m \geq N \Rightarrow u_{n_0} - v_m \leq A).$$

   En particulier pour $A = x - \varepsilon$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\boxed{u_{n_0} - v_{m_0} \leq x - \varepsilon}$.

   (c) Montrons par récurrence la propriété $\mathscr{P}(n)$: ¡¡ $u_n - v_{n_0} \leq x - \varepsilon$ ¿¿ pour tout entier $n \geq n_0$.

   I D'après la question précédente, $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.

   H Soit $n \geq n_0$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie.
   Puisque $u_{n+1} - v_{n_0}$ appartient à A et que $A \cap \,]x-\varepsilon, x] = \emptyset$, alors :

$$u_{n+1} - v_{n_0} \leq x - \varepsilon \quad \text{ou} \quad u_{n+1} - v_{n_0} > x.$$

Dans le premier cas, la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est bien satisfaite.

Dans le deuxième cas, puisque $u_{n+1} - v_{n_0} > x$ et que $u_n - v_{n_0} \leq x - \varepsilon$ d'après $\mathscr{P}(n)$, on obtient :

$$u_{n+1} - u_n = (u_{n+1} - v_{n_0}) + (v_{n_0} - u_n) > x - (x - \varepsilon) = \varepsilon.$$

Mais ceci contredirait alors que $-\varepsilon \leq u_{n+1} - u_n \leq \varepsilon$ puisque $n \geq n_0$. Ce deuxième cas est donc impossible.

Ainsi, la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est bien vérifiée.

Par le principe de récurrence, la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

(d) Par la question précédente, pour tout $n \geq n_0$:

$$u_n \leq v_{n_0} + x - \varepsilon.$$

Posons $M = \max(u_0, \ldots, u_{n_0-1}, v_{n_0} + x - \varepsilon)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $n \leq n_0 - 1$, $u_n \leq \max(u_0, \ldots, u_{n_0-1}) \leq M$;
- si $n \geq n_0$, $u_n \leq v_{n_0} + x - \varepsilon \leq M$.

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est majorée.}}$

4. On vient de démontrer que (u_n) est majorée. Or $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ par hypothèse, d'où une contradiction. L'hypothèse A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ est donc fausse. Autrement dit, $\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

5. (a) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = 2\pi n$. Remarquons que :

- (u_n) et (v_n) divergent vers $+\infty$;
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$ en utilisant la première question avec $\alpha = 1/2$.

D'après ce qui précède, la partie $\boxed{A = \left\{\sqrt{n} - 2\pi m,\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\} \text{ est dense dans } \mathbb{R}.}$

(b) La fonction sin réalise une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$, avec pour bijection réciproque la fonction arcsin elle-même strictement croissante de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Posons $x = \arcsin(a)$ et $y = \arcsin(b)$. Puisque $-1 \leq a < b \leq 1$, alors $-\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$ par stricte croissance de arcsin.

Par densité de la partie A dans $\mathbb{R}$, il existe des entiers $n_0 \in \mathbb{N}$ et $m_0 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$-\frac{\pi}{2} \leq x < \sqrt{n_0} - 2\pi m_0 < y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Puisque sin est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\sin(x) < \sin(\sqrt{n_0} - 2\pi m_0) < \sin(y), \quad \text{qui se récrit} \quad a < \sin(\sqrt{n_0}) < b.$$

D'où l'existence d'un entier $\boxed{n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } a < x_{n_0} < b.}$

(c) Traitons déjà du cas $\ell \in]-1,1[$. On effectue la construction suivante :

- on définit $a_0 = \frac{-1+\ell}{2}$ et $b_0 = \frac{\ell+1}{2}$ si bien que $a_0 < \ell < b_0$ et $(a_0, b_0) \in [-1,1]^2$. D'après la question précédente, il existe un entier $\varphi(0) = n_0$ tel que $x_{\varphi(0)} \in]a_0, b_0[$.
- on définit $a_1 = \frac{a_0+\ell}{2}$ et $b_1 = \frac{\ell+b_0}{2}$, de sorte que $a_0 \leq a_1 < \ell < b_1 \leq b_0$.

  On considère alors la partie $A_1 = \{\sqrt{n + \varphi(0) + 1} - 2\pi m,\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$. On vérifie comme dans les questions précédentes que A_1 est dense dans $\mathbb{R}$, et l'existence d'un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$a_1 < x_{n_1+\varphi(0)+1} < b_1.$$

  On pose alors $\varphi(1) = n_1 + \varphi(0) + 1$. On notera que $\varphi(1) > \varphi(0)$.

En poursuivant cette construction, on définit des suites (a_n) et (b_n) et une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) vérifiant :

- (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, et elles convergent toutes deux vers ℓ ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)}$ appartient à l'intervalle $]a_n, b_n[$.

Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\text{la suite } (x_{\varphi(n)}) \text{ converge vers } \ell.}$

Si $\ell = -1$, on procède de manière analogue en prenant cette fois (a_n) constante égale à -1 et (b_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $b_n = -1 + \frac{1}{n+1}$. Et de même lorsque $\ell = 1$.

Remarque. Inversement, toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) est comprise dans $[-1, 1]$ par passage à la limite dans les inégalités. Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite (x_n) est $[-1, 1]$.

Exercice 2

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Le problème étant symétrique en x et en y, on supposera que $x \leq y$. Alors $\min(x, y) = x$ et $\max(x, y) = y$, et :

$$x = \sqrt{x \times x} \leq \sqrt{x \times y} = m(x, y)$$

par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. D'autre part :

$$M(x, y) = \frac{x+y}{2} \leq \frac{y+y}{2} = y = \max(x, y).$$

Enfin :

$$M(x, y) - m(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - 2\sqrt{xy}) = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2} \geq 0.$$

D'où finalement les inégalités voulues.

2. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: ¡¡ $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ sont bien définis et $a_0 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_0$ ¿¿.

I $\mathscr{P}(0)$ est vraie car $a_0 = a$ et $b_0 = b$ avec $a \leq b$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, c'est-à-dire $a_0, \ldots, a_n$ et $b_0, \ldots, b_n$ sont bien définies et $0 < a_0 \leq \ldots \leq a_n \leq b_n \leq \ldots \leq b_0$. Alors $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ est bien défini et est positif, donc $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$ est bien défini également.

D'autre part, en appliquant la question 1 avec $x = a_n$ et $y = b_n$ (qui appartiennent bien à $\mathbb{R}_+$) :

$$a_n = \min(a_n, b_n) \leq m(a_n, b_n) \leq \underbrace{M(a_n, b_n)}_{a_{n+1}} \leq \max(a_n, b_n) = b_n, \quad \text{et donc} \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_n.$$

En appliquant cette fois la question 1 à $x = a_{n+1}$ et $y = b_n$:

$$a_{n+1} = \min(a_{n+1}, b_n) \leq \underbrace{m(a_{n+1}, b_n)}_{b_{n+1}} \leq M(a_{n+1}, b_n) \leq \max(a_{n+1}, b_n) = b_n$$

et donc

$$a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

Ainsi, $a_0 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \ldots \leq b_0$ et donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\text{la propriété } \mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 &= a_{n+1}b_n - a_{n+1}^2 = a_{n+1}(b_n - a_{n+1}) \\ &= \frac{a_n + b_n}{2}\left(b_n - \frac{a_n + b_n}{2}\right) = \frac{a_n + b_n}{2} \times \frac{b_n - a_n}{2} \\ &= \frac{b_n^2 - a_n^2}{4} = \frac{1}{4}(b_n^2 - a_n^2). \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (b_n^2 - a_n^2) \text{ est géométrique de raison } \tfrac{1}{4}.}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente :

$$(b_n - a_n)(b_n + a_n) = b_n^2 - a_n^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^n (b_0^2 - a_0^2).$$

Mais par la question 2, $a_n + b_n \geq a_0 + a_0 = 2a > 0$ et $b_n - a_n \geq 0$. D'où :

$$\boxed{0 \leq b_n - a_n = \frac{b^2 - a^2}{4^n(a_n + b_n)} \leq \frac{b^2 - a^2}{4^n \times 2a}.}$$

4. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{b^2 - a^2}{4^n \times 2a} = 0$, la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} (b_n - a_n)$ existe et vaut 0 par théorème des gendarmes.

D'autre part, on a démontré que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante à la question 2.

Donc $\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}}$. Par le théorème des suites adjacentes, $\boxed{\text{elles convergent vers une limite commune notée } \mathscr{M}(a,b).}$

5. Toujours par le théorème des suites adjacentes, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$a_m \leq \mathscr{M}(a,b) \leq b_n.$$

Pour $m = 1$ et $n = 0$, on obtient :

$$\boxed{M(a,b) = a_1 \leq \mathscr{M}(a,b) \leq b_0 = b.}$$

6. (a) Puisque $0 < a \leq b$, alors $\dfrac{a}{b} \in \,]0,1]$. Puisque la fonction cos réalise une bijection strictement décroissante de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]0,1]$, il existe un unique réel $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\boxed{\cos(\theta) = \frac{a}{b}.}$

(b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathscr{P}(n)$ suivante :

$$¡¡\ a_n = b_n \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad b_n = b\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\ ¿¿.$$

I Pour $n = 0$, $b_0 = b = b \times \prod\limits_{k=1}^{0} \cos\left(\dfrac{\theta}{2^k}\right)$ (le produit se faisant sur un ensemble vide).
D'autre part, $a_0 = a$ et $b_0 \cos\left(\frac{\theta}{2^0}\right) = b\cos(\theta) = b \times \frac{a}{b} = a$.
Donc la propriété $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Par hypothèse de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{b_n \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) + b_n}{2} = b_n \frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}.$$

Puisque $\cos^2(t) = \dfrac{1 + \cos(2t)}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1 + \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \quad \text{et donc} \quad a_{n+1} = b_n \cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right).$$

Par hypothèse de récurrence :

$$a_{n+1} = b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\times\cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}}) = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right).$$

Ainsi, toujours par hypothèse de récurrence :

$$b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n} = \sqrt{b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\times b\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)} = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)$$

car $\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\geq 0$ pour tout $k\in [\![1,n+1]\!]$. Finalement :

$$b_{n+1} = b\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) \text{ et donc } a_{n+1} = b_{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right).$$

La propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vraie.

Par le principe de récurrence, $\boxed{\mathscr{P}(n) \text{ est vraie pour tout } n\in\mathbb{N}.}$

(c) On déduit du résultat précédent que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
b_{n+1}\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) &= b\left[\prod_{k=1}^{n+1}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\right]\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\\
&= b\left[\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right)\right]\times\cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)\\
&= b_n\times\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(b_n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)
\end{aligned}$$

La suite $\boxed{\left(b_n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right) \text{ est donc géométrique de raison } \frac{1}{2}.}$

(d) D'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$b_n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = b_0\sin\left(\frac{\theta}{2^0}\right)\times\frac{1}{2^n} = \frac{b\sin(\theta)}{2^n}.$$

Deux cas sont possibles :

- si $\theta = 0$, ce qui correspond au cas $a=b$, alors $\cos\left(\frac{\theta}{2^k}\right) = 1$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, et donc $\boxed{b_n = b \text{ et } a_n = b.}$
- si $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, qui correspond au cas $0<a<b$, alors $\sin\left(\frac{\theta}{2^k}\right)>0$ et :

$$\boxed{b_n = \frac{b\sin(\theta)}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}} \quad\text{et}\quad \boxed{a_n = \frac{b\sin(\theta)\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2^n\sin(\frac{\theta}{2^n})}.}$$

(e) Supposons $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Alors :

$$2^n\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{\frac{\theta}{2^n}}\times\theta \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\theta$$

car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\theta}{2^n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ainsi :

$$\boxed{\mathscr{M}(a,b) = \lim_{n\to+\infty} b_n = b\cdot\frac{\sin(\theta)}{\theta}.}$$

(f) Si $\theta = 0$, (b_n) est constante égale à b par la question 6.(d) et $\boxed{\mathscr{M}(a,b) = b}$.

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question 3.(a) :

$$b_n^2 - a_n^2 = \frac{b^2-a^2}{4^n}, \quad \text{d'où} \quad 4^n(b_n - a_n) = \frac{b^2-a^2}{b_n+a_n}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+b_n) = 2\mathscr{M}(a,b)$ et

$$\mathscr{M}(a,b) = \begin{cases} b \cdot \frac{\sin(\theta)}{\theta} & \text{si } \theta \in \,]0, \frac{\pi}{2}[, \\ b & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

Puisque $\mathscr{M}(a,b) > 0$ dans tous les cas :

$$\lim_{n\to+\infty} 4^n(b_n - a_n) = \frac{b^2-a^2}{2\mathscr{M}(a,b)}.$$

Deux cas sont alors possibles :

- Si $\theta = 0$, alors $a = b$ et :
$$\frac{b^2-a^2}{2\mathscr{M}(a,b)} = 0 = \frac{b\theta\sin(\theta)}{2}.$$
.
- Si $\theta \in \,]0, \frac{\pi}{2}[$:
$$\frac{b^2-a^2}{2\mathscr{M}(a,b)} = \frac{b^2 - b^2\cos^2(\theta)}{2b\frac{\sin(\theta)}{\theta}} = \frac{b\theta}{2}\frac{\sin^2(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{b\theta\sin(\theta)}{2}.$$

Dans tous les cas, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n(b_n - a_n) = \frac{b\theta\sin(\theta)}{2}.}$

7. On procède de même qu'à la question 2, je vous laisse le soin de le rédiger.

8. La suite (a_n) est croissante et majorée par b_0. Par le théorème des suites monotones, elle converge vers une limite finie ℓ.

   De même, la suite (b_n) est donc décroissante et majorée par a_0. Par le théorème des suites monotones, (a_n) converge vers une limite finie ℓ'.

9. En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'égalité $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$, on obtient $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$, et donc $\boxed{\ell = \ell'}$.

10. Par définition des suites (a_n) et (b_n), $m(a,b) = a_1$ et $M(a,b) = b_1$. Et par la question 7, pour tout $n \geq 1$, $a_1 \leq a_n \leq b_1$.

    Par passage à la limite dans les inégalités, on obtient $a_1 \leq \ell \leq b_1$, c'est-à-dire $\boxed{m(a,b) \leq \mathscr{M}(a,b) \leq M(a,b).}$

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_nb_n} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2.$$

Puisque $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} \geq \sqrt{a} + \sqrt{a} > 0$, on obtient :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \frac{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} = \frac{1}{2}\frac{(b_n - a_n)^2}{(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n} \geq 2\sqrt{a} > 0$:

$$\frac{1}{2(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})^2} \leq \frac{1}{2(2\sqrt{a})^2} = \frac{1}{8a}.$$

D'où avec la question précédente :

$$\boxed{b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8}(b_n - a_n)^2.}$$

(c) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n - a_n}{8a} = 0$, par définition de la limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \left|\frac{b_n - a_n}{8a}\right| \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\boxed{\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \frac{b_n - a_n}{8a} \leq \frac{1}{2}.}$$

(d) On sait déjà que pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq b_n - a_n$.

Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ la propriété $\mathscr{P}(n)$: ¡¡ $b_n - a_n \leq 8a\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}$ ¿¿.

$\boxed{\textbf{I}}$ Pour $n = n_0$, par la question la question précédente :

$$b_{n_0} - a_{n_0} \leq 8a\frac{1}{2} = 8a\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n_0-n_0}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $n \geq n_0$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Par la question 11.(b) :

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{1}{8a}(b_n - a_n)^2 \leq \frac{1}{8a}\left(8a\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}\right)^2 = 8a\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1-n_0}}.$$

Donc $\mathscr{P}(n+1)$ vraie.

Par le principe de récurrence, $\mathscr{P}(n)$ vraie pour tout $n \geq n_0$.

(e) Soit $q \in]0,1[$ et $n \geq n_0$. Puisque $a_n \leq \mathscr{M}(a,b) \leq b_n$:

$$\frac{|a_n - \mathscr{M}(a,b)|}{q^n} \leq \frac{b_n - a_n}{q^n} \leq \frac{8a\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}}{q^n}.$$

Or :

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}}{q^n} = \exp\left(2^{n-n_0}\ln(1/2) - n\ln(q)\right) = \exp\left(2^n\left(-\ln(2)2^{-n_0} - \frac{n}{2^n}\ln(q)\right)\right).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}}{q^n} = 0$.

Par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_n - \mathscr{M}(a,b)|}{q^n} \text{ existe et vaut } 0.}$