DM 8

A rendre le 06/01/26

Exercice 1

1. **Question préliminaire.** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = n^\alpha$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui divergent vers $+\infty$ et on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$. On note alors :

$$A = \left\{u_n - v_m,\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

On se propose de montrer que A est une partie dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde en supposant que A n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que $A \cap]x - \varepsilon, x] = \emptyset$.

3. (a) Justifier l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.
   (b) Justifier l'existence de $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} - v_{m_0} \leq x - \varepsilon$.
   (c) Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq n_0$, $u_n - v_{m_0} \leq x - \varepsilon$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

4. Conclure.

5. **Application.** Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_n = \sin(\sqrt{n})$.
   (a) Vérifier que la partie $\left\{\sqrt{n} - 2\pi m,\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $(a,b) \in [-1,1]^2$ tel que $a < b$. Démontrer l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a < x_{n_0} < b$.
   (c) Soit $\ell \in [-1,1]$. Justifier l'existence d'une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.

Exercice 2

Pour $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on note :

- $m(x,y) = (x \cdot y)^{1/2}$ la *moyenne géométrique* de (x,y) ;
- $M(x,y) = \dfrac{x+y}{2}$ la *moyenne arithmétique* de (x,y).

1. **Question préliminaire.** Montrer que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$:

$$\min(x,y) \leq m(x,y) \leq M(x,y) \leq \max(x,y).$$

Partie A

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a \leq b$. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = M(a_n, b_n) = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = m(a_{n+1}, b_n) = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

2. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0.$$

3. (a) Vérifier que la suite $\left(b_n^2 - a_n^2\right)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

   (b) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leq b_n - a_n \leq \dfrac{b^2 - a^2}{2a} \cdot \dfrac{1}{4^n}$.

4. Montrer que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes qui convergent vers une même limite notée $\mathscr{M}(a,b)$.

5. Vérifier que $M(a,b) \leq \mathscr{M}(a,b) \leq b$.

6. (a) Montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in [0, \pi/2\,[$ tel que $\cos(\theta) = \dfrac{a}{b}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n \cdot \cos(\theta/2^n)$ et $b_n = b \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\theta/2^k\right)$.

   (c) Montrer que la suite $(b_n \cdot \sin(\theta/2^n))$ est une suite géométrique.

   (d) En déduire l'expression explicite de a_n et b_n en fonction de b, n et θ.

   (e) Vérifier que $\mathscr{M}(a,b) = b \cdot \dfrac{\sin(\theta)}{\theta}$ si $\theta \neq 0$.

   (f) Que vaut $\mathscr{M}(a,b)$ si $\theta = 0$?

   (g) Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 4^n (b_n - a_n) = \frac{b\theta \sin\theta}{2}$.

Partie B

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a \leq b$. On considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = m(a_n, b_n) = \sqrt{a_n b_n} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = M(a_n, b_n) = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

7. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n \leq b_n \leq \cdots \leq b_1 \leq b_0.$$

8. En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers des limites finies ℓ et ℓ'.

9. Montrer que $\ell = \ell'$.

   On notera $\mathfrak{M}(a,b)$ cette limite commune appelée *moyenne arithmético-géométrique*.

10. Vérifier que $m(a,b) \leq \mathfrak{M}(a,b) \leq M(a,b)$.

11. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}\right)^2} \cdot (b_n - a_n)^2$.

    (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{1}{8a} \cdot (b_n - a_n)^2$.

    (c) Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$: $\quad \dfrac{b_n - a_n}{8a} \leq \dfrac{1}{2}$.

    (d) Vérifier que : $\quad \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq b_n - a_n \leq 8a \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{2^{n-n_0}}$.

    (e) Soit $q \in \,]0,1[$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_n - \mathfrak{M}(a,b)|}{q^n} = 0$. On dit que la convergence de (a_n) vers $\mathfrak{M}(a,b)$ est *quadratique*.