Correction - DS 1

Devoir surveillé du Samedi 20 Septembre

Exercice 1

1. **Résolution de l'équation.** On raisonne par disjonction de cas.

   - Sur $]-\infty,-1]$, $x+1\leq 0$ et $3x-2\leq 0$, d'où :
   $$|x+1| = 4-|3x-2| \Leftrightarrow -x-1 = 4+3x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4} \notin]-\infty,-1].$$
   - Sur $\left]-1,\frac{2}{3}\right]$, $x+1\geq 0$ et $3x-2\leq 0$, donc :
   $$|x+1| = 4-|3x-2| \Leftrightarrow x+1 = 4+3x-2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \in \left]-1,\frac{2}{3}\right].$$
   - Sur $\left(\right]\frac{2}{3},+\infty\left[\right.$, $x+1\geq 0$ et $3x-2\geq 0$, d'où :
   $$|x+1| = 4-|3x-2| \Leftrightarrow x+1 = 4-3x+2 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \in \left[\frac{2}{3},+\infty\right[.$$

   Finalement, $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right\}.}$

   Résolution de l'inéquation. Notons pour commencer qu'elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{(x-1)^2}{8x} \leq \frac{x+1}{2} - \sqrt{x} &\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2} - \frac{(x-1)^2}{8x} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{4x(x+1)-(x-1)^2}{8x} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{3x^2+6x-1}{8x} \\
&\Leftrightarrow x \leq \left(\frac{3x^2+6x-1}{8x}\right)^2 \quad (x\mapsto x^2 \text{ strict. croissante sur } \mathbb{R}_+^*) \\
&\Leftrightarrow 64x^3 \leq 9x^4+36x^2+1+36x^3-6x^2-12x \quad (\text{car } 64x^2>0) \\
&\Leftrightarrow 0 \leq 9x^4-28x^3+30x^2-12x+1 = (x-1)^3(9x-1)
\end{aligned}$$

   La dernière factorisation s'obtient par l'algorithme de Hörner, 1 étant racine évidente à trois reprises. Effectuons un tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1}{9}$		1		$+\infty$
$(x-1)^3$			$-$		0	$+$	
$9x-1$		$-$	0		$+$		
$(x-1)^3(9x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Finalement, $\boxed{\mathscr{S} = \left]0,\frac{1}{9}\right] \cup [1,+\infty[.}$

2. **Première inégalité.** Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Par positivité des membres de l'inéquation et stricte croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} 1+\sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x}\sqrt{1+y} &\Leftrightarrow (1+\sqrt{xy})^2 \leq (1+x)(1+y) \\ &\Leftrightarrow 1+2\sqrt{xy}+xy \leq 1+x+y+xy \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x+y-2\sqrt{xy} \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant toujours vraie, cela prouve l'inégalité de départ.

Seconde inégalité. Soient $x, y \in [0,1]$. Puisque $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$:

$$x^2+y^2-xy-1 \leq x+y-xy-1 = (x-1)(1-y) \leq 0.$$

Ainsi, $\boxed{x^2+y^2-xy \leq 1.}$

3. Montrons par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: ¡¡ $u_n = (-1)^n + 3 \times 4^n$ ¿¿ est vraie.

I $(-1)^0 + 3\times 4^0 = 4 = u_0$ et $(-1)^1 + 3 \times 4^1 = 11 = u_1$ donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ vraies. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n &= 3\left((-1)^{n+1} + 3\times 4^{n+1}\right) + 4\left((-1)^n + 3 \times 4^n\right) \\ &= (-1)^n(3\times(-1)+4) + 3\times 4^n(3\times 4+4) \\ &= (-1)^n + 3 \times 4^n \times 16 = (-1)^{n+2} + 3\times 4^{n+2} \end{aligned}$$

D'où $\mathscr{P}(n+2)$ vraie.

Par principe de récurrence, $\boxed{u_n = (-1)^n + 3\times 4^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

4. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1,1]$.

- **Analyse.** Supposons qu'il existe une fonction g continue sur $[-1,1]$ telle que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$, une fonction $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ constante égale à un réel noté C, telles que $f = g+h$. Alors :

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (g+h)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} h(t)\,\mathrm{d}t = 0 + [Ct]_{-1}^{1} = 2C.$$

Donc h est la fonction constante sur $[-1,1]$ égale à $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$, et pour tout $x \in [-1,1]$:

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci prouve l'unicité de la décomposition.

- **Synthèse.** Posons $C = \displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et pour tout $x \in [-1,1]$, $g(x) = f(x) - C$ et $h(x) = C$.

Par définition, $f = g+h$, h est constante et g est continue sur $[-1,1]$ et vérifie :

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} (f(t)-C)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} C\,\mathrm{d}t = 2C - [Ct]_{-1}^{1} = 2C - 2C = 0.$$

Ceci prouve l'existence de la décomposition.

Ainsi, il existe bien une unique fonction g continue sur $[-1,1]$ et d'intégrale nulle sur ce segment et une unique fonction h constante sur $[-1,1]$ telles que $f = g+h$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que :
$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + 3n + 3 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2.$$
Par stricte croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$:
$$n + 1 \leq \sqrt{n^2 + 3n + 2} < n + 2; \quad \text{et donc} \quad \boxed{\left\lfloor \sqrt{n^2+3n+3} \right\rfloor = n+1.}$$

6. (a) Soit $x \in [0, 1[$. Alors $0 \leq \frac{x}{3} < \frac{1}{3} < 1$, $0 \leq \frac{x+1}{3} < \frac{2}{3} < 1$ et $0 \leq \frac{x+2}{3} < 1$. Donc :
$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = 0.$$
Ainsi, $\boxed{f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor = 0.}$

(b) Rappelons le résultat suivant vu en cours :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z}, \quad \lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$
Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculons :
$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+3}{3} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} + 1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) \\ &\boxed{= f(x).} \end{aligned}$$
En d'autres termes, f est 1-périodique.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par 1-périodicité de f, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
$$f(x+n) = f(x + n \times 1) = f(x).$$
D'où :
$$f(x) = f((x - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor) = f(x - \lfloor x \rfloor) = 0$$
par la question 6.(a) puisque $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$. Ainsi, $f(x) = 0$, soit :
$$\boxed{\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.}$$

Exercice 2

1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$$|f_1(x) + f_1(x)| = |x + y| \quad \text{et} \quad |f_2(x) + f_2(x)| = |-x-y| = |-(x+y)| = |x+y|.$$
Donc $\boxed{f_1 \text{ et } f_2 \text{ vérifient } (\bigstar).}$

2. Prouvons que (P_2) est vraie, en prouvant l'équivalence par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |x|$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $|f(x)| = |x|$, alors $f(x) = x$ **ou** $f(x) = -x$.
Ainsi, l'implication :
$$(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \textbf{ ou } f(x) = -x)$$
est vraie.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ **ou** $f(x) = -x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Par hypothèse, $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. Dans le premier cas, $|f(x)| = |x|$, et dans le second cas $|f(x)| = |-x| = |x|$. Ainsi, $|f(x)| = |x|$.

On a donc prouvé que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \textbf{ ou } f(x) = -x) \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|)$$

est vraie.

Par double implication, $\boxed{(P_2) \text{ est vraie.}}$

En revanche, l'assertion (P_1) n'est pas toujours vraie, comme le prouve le cas de la fonction $f : x \mapsto |x|$:

- elle vérifie l'assertion ¡¡ $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|$ ¿¿ ;
- Puisque $f(1) = 1 \neq -1$, l'assertion ¡¡ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x$ ¿¿ est fausse. De même, puisque $f(-1) = 1 \neq -1$, l'assertion ¡¡ $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ ¿¿ est également fausse. Ainsi, ¡¡ $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x)$ **ou** $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x)$ ¿¿ est fausse.

Par conséquent, les deux assertions $(\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|)$ et $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x)$ **ou** $(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x)$ ne sont pas équivalentes, et $\boxed{(P_1) \text{ est fausse.}}$

3. (a) En prenant $x = y = 0$ dans la relation $(\bigstar)$:

$$|f(0) + f(0)| = |0 + 0| = 0 \Rightarrow 2\,|f(0)| = 0, \text{ d'où } \boxed{f(0) = 0.}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|f(x)| = |f(x) + f(0)| = |x + 0| \boxed{= |x|\,.}$$

(c) Par l'absurde. Supposons que

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x) \textbf{ et } (\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq -x).$$

Les noms des variables étant muets, on peut aussi écrire :

$$(\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq x) \textbf{ et } (\exists y \in \mathbb{R},\ f(y) \neq -y).$$

Considérons donc deux tels réels x et y tels que $f(x) \neq x$ et $f(y) \neq -y$. Remarquons que x et y sont nécessairement non nuls avec la question 3. De plus, puisque $|f(x)| = x$ et que $f(x) \neq x$, alors $f(x) = -x$, et de même $f(y) = y$.

Alors :

$$|f(x) + f(y)| = |-x + y|, \qquad \text{et avec } (\bigstar) \qquad |f(x) + f(y)| = |x + y|.$$

Donc $|-x + y| = |x + y|$. Deux cas sont possibles :

- $-x + y = x + y$, mais alors $x = 0$ ce qui est faux ;
- $x - y = x + y$, mais alors $y = 0$, ce qui est faux également.

On aboutit dans tous les cas à une contradiction. Ainsi :

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x).}$$

4. La question précédente montre que si f vérifie $(\bigstar)$, alors $f = f_1$ ou $f = f_2$. Par ailleurs, nous avons déjà montré que f_1 et f_2 vérifient $(\bigstar)$.

Ainsi, $\boxed{\text{il existe exactement deux fonctions vérifiant } (\bigstar), \text{ qui sont } f_1 \text{ et } f_2.}$

Exercice 3 (Étude d'une suite)

1. (a) On pose $f : x \in]-1, +\infty[\mapsto x - \ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, +\infty[: \quad x \geq \ln(1+x).}$

(b) On pose $g : x \in [0, +\infty[\mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et pour tout $x \geq 0$:

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x}{1+x} + \frac{x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}.$$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

Donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+ : \quad \ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}.}$

2. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)!} \times \frac{k!}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \times (k+1) \times \frac{k!}{(k+1)!} \boxed{= \left(\frac{k+1}{k}\right)^k.}$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par le calcul précédent :

$$\ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = k \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

En utilisant la question 1. avec $x = \dfrac{1}{k}$ (qui vérifie bien $x > -1$ et $x \geq 0$) :

$$\frac{1}{k} - \frac{(1/k)^2}{2} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}.$$

D'où en multipliant par $k > 0$:

$$k\left(\frac{1}{k} - \frac{(1/k)^2}{2}\right) \leq \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leq k\frac{1}{k}$$

qui se récrit :

$$\boxed{1-\frac{1}{2k} \leq \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leq 1.}$$

3. (a) Soit $k \geq 2$. En appliquant la question 1. avec $x = -\dfrac{1}{k} > -1$:

$$\boxed{\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{k}\right) \leq \frac{-1}{k}.}$$

(b) Soit $k \geq 2$. À partir du calcul précédent :

$$\ln(k-1)-\ln(k) \leq \frac{-1}{k}.$$

D'où :

$$1+\frac{\ln(k-1)-\ln(k)}{2} \leq 1-\frac{1}{2k}.$$

Et donc avec la question 2.(b) :

$$\boxed{1+\frac{\ln(k-1)-\ln(k)}{2} \leq \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leq 1.}$$

4. Soit $n \geq 3$. Sommons les inégalités précédentes pour k variant de 2 à $n-1$:

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(1+\frac{\ln(k-1)-\ln(k)}{2}\right) \leq \sum_{k=2}^{n-1}\ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leq \sum_{k=2}^{n-1} 1 = (n-1)-2+1 = n-2.$$

Pour la première somme :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}\left(1+\frac{\ln(k-1)-\ln(k)}{2}\right) &= n-2+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n-1}(\ln(k-1)-\ln(k)) = n-2+\frac{1}{2}(\ln(1)-\ln(n-1))\\ &= n-2-\frac{\ln(n-1)}{2}\end{aligned}$$

par télescopage. Pour la deuxième somme, de nouveau par télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) = \sum_{k=2}^{n-1}\ln(v_{k+1})-\ln(v_k) = \ln(v_n)-\ln(v_2) = \ln(v_n)-\ln(2).$$

Ainsi :

$$\boxed{\ln(2)+n-2-\frac{\ln(n-1)}{2} \leq \ln(v_n) \leq \ln(2)+n-2.}$$

5. En divisant par $n > 0$ les inégalités précédentes :

$$\frac{\ln(2)}{n}+1-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n-1)}{2n} \leq \frac{\ln(v_n)}{n} \leq \frac{\ln(2)}{n}+1-\frac{2}{n}.$$

Récrivons le membre de gauche :

$$\frac{\ln(2)}{n}+1-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n-1)}{2n} = \frac{\ln(2)}{n}+1-\frac{2}{n}-\frac{\ln(n)}{2n}-\frac{\ln(1-1/n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

par croissances comparées. Puisque d'autre part $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{n}+1-\dfrac{2}{n} = 1$, par théorème des gendarmes, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(v_n)}{n}$ existe et vaut 1.

Enfin :

$$u_n = \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \frac{e^{\frac{1}{n}\ln(n!)}}{e^{\ln(n)}} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(n!) - \ln(n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\left[\ln(n!) - \ln(n^n)\right]\right) = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(v_n)\right)$$

Et par continuité de l'exponentielle :

$$u_n = \exp\left(-\frac{1}{n}\ln(v_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } e^{-1}.}$

Exercice 4 (Une limite avec des coefficients binomiaux)

Partie A : Préliminaires.

1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par définition des coefficients binomiaux :

$$\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{n-k+1}{k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \boxed{= \binom{n}{k}.}$$

2. • Supposons $1 \leq k \leq n/2$. Alors $2k \leq n$, d'où $k \leq n-k$. Par conséquent :

$$k < n-k+1, \quad \text{et donc} \quad \frac{n-k+1}{k} > 1.$$

En multipliant cette inégalité par $\binom{n}{k-1} > 0$ et avec la question précédente :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}.}$$

• Si $n-1 \geq k \geq n/2$, alors de même $n-k \leq k < k+1$, et donc :

$$\frac{n-k}{k+1} < 1.$$

En multipliant cette inégalité par $\binom{n}{k} > 0$:

$$\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} < \binom{n}{k}.$$

Or, on déduit de la question précédente avec le changement de variable $p = k-1$ que :

$$\forall p \in [\![0, n-1]\!], \quad \binom{n}{p+1} = \frac{n-p}{p+1}\binom{n}{p}.$$

Finalement :

$$\boxed{\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k} < \binom{n}{k}.}$$

3. Ces inégalités montrent que la suite des coefficients binomiaux $\left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![1,n-1]\!]}$ est croissante strictement entre 1 et $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, puis strictement décroissante entre $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ et $n-1$, et qu'elle atteint son maximum pour $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Partie B : Encadrement et limite.

4. Puisque $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{1}{\binom{n}{k}}}_{\geq 0} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \geq \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \boxed{= 2.}$$

5. On distingue deux cas :
   - pour $k \in \{2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, la suite $k \mapsto \binom{n}{k}$ est croissant, donc $\binom{n}{2} \leq \binom{n}{k}$.
   - pour $k \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, n-2\}$, $k \mapsto \binom{n}{k}$ est décroissant, donc $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} \leq \binom{n}{k}$.

   Ainsi, $\boxed{\binom{n}{2} \leq \binom{n}{k} \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n-2\}.}$

6. Puisque $\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2}$ pour tout $k \in \{2, \dots, n-2\}$, chaque terme de la somme S_n est inférieur à $\frac{1}{\binom{n}{2}}$. D'où :

$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{2}} = [(n-2) - 2 + 1] \frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-3}{\binom{n}{2}} = \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.$$

7. Avec les inégalités des questions 4. et 6. :

$$\boxed{2 \leq S_n = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 2 + \frac{2(n-3)}{n(n-1)}.}$$

   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2(n-3)}{n(n-1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{n^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2 + \frac{2(n-3)}{n(n-1)} = 2$.

   Par théorème des gendarmes, $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n \text{ existe et vaut } 2.}$

Exercice 5 (Exercice hors barème)

Procédons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ en posant

$$\mathscr{P}(p) : \quad \text{¡¡ } \forall a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}_+,\ a_1 a_2 \dots a_p = 1 \Rightarrow a_1 + \dots + a_p \geq p \text{ ¿¿}.$$

I $a_1 = 1 \geq 1$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

H Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(p)$ est vraie.

Soient $a_1, \dots, a_{p+1}$ des réels positifs tels que $a_1 a_2 \dots a_{p+1} = 1$.

Les a_i sont nécessairement strictement positifs (leur produit est égal à 1) et, quitte à les échanger, on peut supposer :

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{p+1}.$$

Remarquons que $a_1 \leq 1$, car sinon $a_1 a_2 \dots a_{p+1} \geq a_1^{p+1} > 1$. De même, $a_{p+1} \geq 1$, car sinon $a_1 a_2 \dots a_{p+1} \leq a_{p+1}^{p+1} < 1$.

Comme $a_2 a_3 \dots a_p (a_1 a_{p+1}) = 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux réels positifs $a_2, a_3, \dots, a_p, (a_1 a_{p+1})$ et donc $a_2 + a_3 + \dots + a_p + (a_1 a_{p+1}) \geq p$. Alors :

$$\begin{aligned}
a_1 + \dots + a_p + a_{p+1} &= a_2 + a_3 + \dots + a_p + (a_1 a_{p+1}) + a_1 + a_{p+1} - a_1 a_{p+1} \\
&\geq p + a_1 + a_{p+1} - a_1 a_{p+1} \\
&\geq p + \underbrace{(1 - a_1)}_{\geq 0} \underbrace{(a_{p+1} - 1)}_{\geq 0} + 1 \\
&\geq p + 1.
\end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}(p+1)$ vraie.

Par principe de récurrence, $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.