Correction - DS 3

Devoir surveillé du Samedi 13 Décembre

Exercice 1

1. Calculons :

$$u_1 = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x))]_0^{\pi/3} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \boxed{= \ln(2).}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\int_0^{\pi/3} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\pi/3} \boxed{= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.}$$

(b) Soit $\in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_n &= \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+2}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/3} \sin^n(x)\frac{\sin^2(x)-1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi/3} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{\sin^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\pi/3} \boxed{= -\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}.} \end{aligned}$$

En particulier pour $n = 1$, on obtient : $\quad u_3 = -\frac{1}{2}\frac{3}{4} + u_1 \boxed{= \ln(2) - \frac{3}{8}.}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$:

$$0 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ et donc } 0 \leq \sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x).$$

Puisque $\cos(x) > 0$: $\quad 0 \leq \dfrac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)} \leq \dfrac{\sin^n(x)}{\cos(x)}.$

Par croissance de l'intégrale, on obtient :

$$0 \leq u_{n+1} = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = u_n.$$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante.}}$

La suite (u_n) est décroissante, minorée par 0. Par le théorème des suites monotones, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente.}}$

4. (a) Puisque sin est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin(x) \leq \sin(\frac{\pi}{3}) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Dans la suite, on note donc $\boxed{K = \frac{\sqrt{3}}{2}.}$

(b) Pour $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $0 \leq \sin^n(x) \leq K^n$, et par ailleurs $\cos(x) \geq \cos(\frac{\pi}{3}) = \dfrac{1}{2}$. Donc :

$$0 \leq \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \leq 2K^n.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \int_0^{\pi/3} 2K^n \,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}K^n.}$$

Puisque $K \in]0,1[$, $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n \text{ existe et vaut } 0.}$

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} \geq 0.$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ est croissante.}}$

Par ailleurs, en reprenant l'encadrement de u_k obtenu à la question 4.(b), on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{2\pi}{3}K^k = \frac{2\pi}{3}\frac{1-K^{n+1}}{1-K} \leq \frac{2\pi}{3(1-K)}.$$

La suite (S_n) est donc majorée et croissante, $\boxed{\text{elle possède une limite finie}}$ par le théorème des suites monotones.

(b) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\sin(x) \neq 1$. Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(x)}{\cos(x)} = \frac{1-\sin^{n+1}(x)}{1-\sin(x)}.$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^k(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin^k(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} \sum_{k=0}^{n} \sin^k(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \frac{1-\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x \\ &\boxed{= \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)(1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x.} \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$:

$$0 < \cos(x)(1-K) \leq \cos(x)(1-\sin(x)) \quad \text{et donc} \quad 0 \leq \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x))} \leq \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-K)}.$$

Et par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{1-K}\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{u_{n+1}}{1-K}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/3} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x)}\,\mathrm{d}x$ existe et vaut 0.

En passant à la limite dans l'égalité obtenue à la question précédente (en notant bien que tout converge), on obtient :

$$\boxed{S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x.}$$

(d) Réalisons le changement de variable $t = \sin(x)$, en notant que $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$ et que $t : 0 \to \frac{\sqrt{3}}{2}$ lorsque $x : 0 \to \frac{\pi}{3}$. On obtient :

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{(1-\sin^2(x))(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x \\ &\boxed{= \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)(1-t)}.} \end{aligned}$$

(e) Reste à calculer l'intégrale précédente, ce qui nécessite d'intégrer une fraction rationnelle (de degré strictement négatif). Cherchons sa décomposition en éléments simples. Par le cours, on va la chercher sous la forme :

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1}. \qquad (\star)$$

- En multipliant $(\star)$ par $(x-1)^2$ et en évaluant en $x = 1$, on obtient $b = \frac{1}{2}$.
- En multipliant $(\star)$ par $x+1$ et en évaluant en $x = -1$, on obtient $c = \frac{1}{4}$.
- En multipliant $(\star)$ par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $a = -c = -\frac{1}{4}$

Finalement :

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}t}{t-1} + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} + \frac{1}{4}\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\ &= \frac{1}{4}\left[\ln(1+t) - \ln(|t-1|) - \frac{2}{t-1}\right]_0^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{4}\left(\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}/2-1} - 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}-2} - 2\right) \\ &\boxed{= \frac{1}{4}\ln\left(7+4\sqrt{3}\right) + \sqrt{3} + \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

en multipliant par les quantités conjuguées pour simplifier les racines aux dénominateurs.

Exercice 2

Fait en cours !

Exercice 3

1. On a z qui est dérivable, avec $z'' = y'' - y'$.

   Alors y est solution de (E) si et seulement si

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1.$$

   Mais pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned} xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1 &\Leftrightarrow x(z'(x) + y'(x)) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow xz'(x) - y'(x) + y(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow xz'(x) - z(x) = 1. \end{aligned}$$

   Et donc y est solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xz'(x) - z(x) = 1$, donc si et seulement si z est solution de (E').

2. Sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, (E') est équivalente à $z'(x) - \frac{1}{x}z(x) = \frac{1}{x}$.

   L'équation homogène associée est $z'(x) - \frac{z(x)}{x} = 0$, qui a pour ensemble de solutions
$$\left\{x \mapsto \lambda e^{\ln|x|}, \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \{x \mapsto \lambda|x|, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

   Sut $\mathbb{R}_+^*$, on a $|x| = x$.

   Et sur $\mathbb{R}_-^*$, $|x| = -x$, si bien que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E') est $\{x \mapsto -\lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Mais quitte à changer λ en son opposé, on retrouve $\{x \mapsto \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   Une variation de la constante nous permettrait de trouver une solution particulière, mais plus simplement ici, constatons que la fonction constante égale à -1 est solution de (E').

   Et donc sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, l'ensemble des solutions de (E') est
$$\boxed{\{x \mapsto \lambda x - 1, \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

3. Procédons par analyse-synthèse.

   - **Analyse.** Soit z une solution de (E') sur $\mathbb{R}$.
     Alors pour $x = 0$, on obtient $z'(0) = -1$, et puisque z est solution de (E') sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, il existe deux réels λ, μ tels que
$$z : x \mapsto \begin{cases} \lambda x - 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \\ \mu x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
     Puisque z est dérivable en 0, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{z(x) - z(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{z(x) - z(0)}{x - 0}$.
     Mais pour $x > 0$,
$$\frac{z(x) - z(0)}{x - 0} = \frac{\mu x - 1 + 1}{x} = \mu \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \mu$$
     Et de même, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{z(x) - z(0)}{x - 0} = \lambda$, si bien que $\lambda = \mu$.
     Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z(x) = \lambda x - 1$.
   - **Synthèse.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $z : x \mapsto \lambda x - 1$ est évidement dérivable sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z'(x) = \lambda$, et donc
$$xz'(x) - z(x) = \lambda x - (\lambda x - 1) = 1.$$
     Donc z est solution de (E'), si bien que l'ensemble des solutions de (E') sur $\mathbb{R}$ est
$$\boxed{\{x \mapsto \lambda x - 1, \lambda \in \mathbb{R}\}.}$$

4. Une fonction y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'(x) - y(x) = \lambda x - 1$.

   Pour $\lambda \in \mathbb{R}$; notons donc (E_λ) l'équation différentielle $y'(x) - y(x) = \lambda x - 1$.

   Les solutions de l'équation homogène associée sont les $x \mapsto \mu e^x, \mu \in \mathbb{R}$.

   Par ailleurs, nous savons (propriété 7 du cours) qu'il existe une solution de cette équation sous la forme d'une fonction polynomiale de degré 1.

   Cherchons donc une telle solution sous la forme $y : x \mapsto ax + b$.

   Alors y est solution de (E_λ) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a - (ax + b) = \lambda x - 1$, ce qui est par identification des coefficients est le cas si et seulement si
$$\begin{cases} -a = \lambda \\ a - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\lambda \\ b = 1 - \lambda \end{cases}$$

Donc $y : -\lambda(1+x)+1$ est une solution particulière de (E_λ), si bien que l'ensemble des solutions de (E_λ) est
$$\{x \mapsto \mu e^x - \lambda(1+x)+1, \mu \in \mathbb{R}\}.$$
Et donc une fonction y est solution de (E) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que y est solution de (E_λ), donc si et seulement si il existe deux réels λ, μ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \mu e^x - \lambda(1+x)+1$.

Pour conclure, l'ensemble des solutions de (E) est donc
$$\left\{x \mapsto \mu e^x - \lambda(1+x)+1, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 4

1. On a :
$$\begin{aligned}
A\Delta E &= (A\backslash E)\cup(E\backslash A) = \emptyset \cup \bar{A} = \bar{A}\\
A\Delta A &= (A\backslash A)\cup(A\backslash A) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset\\
A\Delta\emptyset &= (A\backslash\emptyset)\cup(\emptyset\backslash A) = A\cup\emptyset = A\\
A\Delta\bar{A} &= (A\backslash\bar{A})\cup(\bar{A}\backslash A) = A\cup\bar{A} = E
\end{aligned}$$

2. Une preuve par double inclusion est possible. Mais préférons le calcul suivant :
$$\begin{aligned}
A\Delta B &= (A\backslash B)\cup(B\backslash A) = (A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\\
&= ((A\cap\bar{B})\cup B)\cap((A\cap\bar{B})\cup\bar{A})\\
&= ((A\cup B)\cap\underbrace{(\bar{B}\cup B)}_{=E})\cap(\underbrace{(A\cup\bar{A})}_{=E}\cap(\bar{B}\cup\bar{A}))\\
&= (A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})\\
&= (A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}) = (A\cup B)\backslash(A\cap B).
\end{aligned}$$

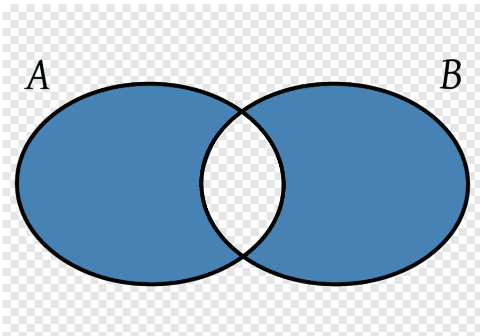

Diagramme de Venn de la différence symétrique.

3. On a, en utilisant la question précédente :
$$\begin{aligned}
\overline{A\Delta B} &= \overline{(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})}\\
&= (\overline{A\cup B})\cup(\overline{\overline{A\cap B}}) = (\bar{A}\cap\bar{B})\cup(A\cap B)\\
&= (\bar{A}\cup(A\cap B))\cap(\bar{B}\cup(A\cap B))\\
&= (\underbrace{(\bar{A}\cup A)}_{=E}\cap(\bar{A}\cup B))\cap((\bar{B}\cup A)\cap\underbrace{(\bar{B}\cup B)}_{=E})\\
&= (\bar{A}\cup B)\cap(\bar{B}\cup A) = (\bar{A}\cup B)\cap(\overline{\bar{A}\cap B})\\
&= (\bar{A}\cup B)\backslash(\bar{A}\cap B) = \overline{A}\Delta B.
\end{aligned}$$

Et pour la seconde égalité, notons qu'on a toujours $A\Delta B = B\Delta A$ et donc

$$A\Delta\bar{B} = \bar{B}\Delta A \underbrace{=}_{\substack{\text{calcul}\\ \text{précédent}}} \overline{B\Delta A} = \overline{A\Delta B}.$$

On en déduit avec ces deux égalités :

$$\bar{A}\Delta\bar{B} = \overline{A\Delta\overline{\bar{B}}} = A\Delta\overline{\overline{B}} = A\Delta B.$$

4. (a) En utilisant la définition de Δ puis la question 3., on obtient :

$$(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B)\cap\bar{C})\cup(\overline{A\Delta B}\cap C) = (((A\Delta B)\cap\bar{C})\cup((\bar{A}\Delta B)\cap C).$$

   (b) Reprenons l'expression de la question précédente, et utilisons la définition de Δ puis la distributivité de l'intersection sur l'union :

$$\begin{aligned}(A\Delta B)\Delta C &= (((A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B))\cap\bar{C})\cup(((\bar{A}\cap\bar{B})\cup(A\cap B))\cap C)\\ &= (A\cap\bar{B}\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})\cup(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

   (c) Remarquons que $A\Delta(B\Delta C) = (B\Delta C)\Delta A = (C\Delta B)\Delta A$. Et donc en reprenant le calcul précédent, et échangeant les rôles joués par A et C, il vient :

$$\begin{aligned}A\Delta(B\Delta C) &= (C\Delta B)\Delta A\\ &= (C\cap\bar{B}\cap\bar{A})\cup(\bar{C}\cap B\cap\bar{A})\cup(\bar{C}\cap\bar{B}\cap A)\cup(C\cap B\cap A)\\ &= (A\Delta B)\Delta C\end{aligned}$$

5. En utilisant la commutativité et l'associativité de Δ ainsi que les calculs effectués à la question 1., on obtient :

$$A\Delta B\Delta A = A\Delta(B\Delta A) = A\Delta(A\Delta B) = (A\Delta A)\Delta B = \emptyset\Delta B = B.$$

6. (a) Soient B et C deux parties de E telles que $f_A(B) = f_A(C)$, ce qui se récrit $A\Delta B = A\Delta C$. Alors $A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C)$, soit encore $A\Delta B\Delta A = A\Delta C\Delta A$ (par commutativité et associativité de Δ). Et donc par la question 5., $B = C$. Ainsi, f_A est injective.

   (b) La question 5 prouve que pour tout $C \in \mathscr{P}(E)$:

$$A\Delta(C\Delta A) = C \Leftrightarrow f_A(C\Delta A) = C.$$

   Donc pour $C \in \mathscr{P}(E)$ fixé, C possède bien un antécédent B par f_A, à savoir $C\Delta A = A\Delta C$. Donc f_A est surjective.

   (c) D'après les deux questions précédentes, f_A est injective et surjective. Elle est donc bijective. Ainsi, tout élément de $\mathscr{P}(E)$ admet exactement un antécédent par f_A. L'équation $A\Delta B = A \Leftrightarrow f_A(B) = A$ d'inconnue $B \in \mathscr{P}(E)$ admet donc une unique solution.

   Or, nous savons que $B = \emptyset$ est une solution puisque $f_A(\emptyset) = A\Delta\emptyset = A$. C'est donc l'unique solution.
