DS 3

Devoir surveillé du Samedi 13 Décembre

La calculatrice est interdite. Durée : 3h.

Exercice 1 (Limite d'une suite d'intégrales)

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer u_1.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n, et en déduire la valeur de u_3.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire qu'elle est convergente.
4. (a) Déterminer un réel $K \in]0,1[$ tel que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\sin(x) \leq K$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{2\pi}{3}K^n$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.
   En déduire qu'elle possède une limite finie qu'on notera S.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)(1-\sin(x))} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)(1-\sin(x))}\,\mathrm{d}x$.
   (c) En déduire que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)(1-\sin(x))}$.
   (d) À l'aide d'un changement de variable, prouver que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2(1+u)}$.
   (e) En déduire la valeur de S.

Exercice 2

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   (a) $17 \mid 2^{6n+3} + 3^{4n+2}$;
   (b) $6 \mid n(n+2)(7n-5)$.
2. On s'intéresse à l'équation (E) : $18x + 25y = 1$, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
   (a) Déterminer une solution particulière (x_0, y_0) de (E).
   (b) En déduire toutes les solutions de (E).
3. Déterminer les entiers $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\mathrm{ppcm}(28, b) = 140$.
4. Trouver $n \in \mathbb{N}^*$ sachant que le produit de ses diviseurs positifs est 45^{42}.

Exercice 3 (Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants)

On cherche dans cet exercice à déterminer l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 1. \tag{E}$$

1. Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose $z = y' - y$.

   Montrer que y est solution de (E) si, et seulement si, z est solution de

   $$xz'(x) - z(x) = 1. \tag{E'}$$

2. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. En justifiant soigneusement votre raisonnement, déterminer les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on appelle *différence symétrique de A et B*, et on note $A\Delta B$ la partie de E définie par $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$.

Notons qu'on a toujours $A\Delta B = B\Delta A$.

1. Pour $A \in \mathscr{P}(E)$, déterminer les ensembles : $A\Delta E$, $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$ et $A\Delta\bar{A}$.

2. Montrer que pour $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

3. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\overline{A\Delta B} = \bar{A}\Delta B = A\Delta\bar{B}$. Que dire de $\bar{A}\Delta\bar{B}$?

4. Soient A, B, C trois parties de E.
   (a) Justifier que $(A\Delta B)\Delta C = ((A\Delta B) \cap \bar{C}) \cup ((\bar{A}\Delta B) \cap C)$.
   (b) En déduire que $(A\Delta B)\Delta C = (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.
   (c) Sans nouveaux calculs, justifier alors que $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$.

5. En effectuant le moins de calculs possibles, déterminer $A\Delta B\Delta A$, où A et B sont deux parties de E.

6. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. On note alors f_A l'application : $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & A\Delta B \end{array} \right.$.
   (a) Montrer que f_A est injective.
   (b) Montrer que f_A est surjective. *On pourra utiliser le résultat de la question 5.*
   (c) Justifier que l'équation $A\Delta B = A$, d'inconnue $B \in \mathscr{P}(E)$, admet une unique solution, puis la déterminer.
