TD 1

Raisonner et rédiger

Quantificateurs et connecteurs logiques

Exercice 1.1 (★)

Énoncer pour chaque proposition $\mathscr{P}$ qui suit, la proposition (**non** $\mathscr{P}$).

(i) Dans la classe, il y a 16 filles et 18 garçons.

(ii) Chaque été, il pleut au moins une journée en Bretagne.

(iii) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.

(iv) S'il pleut, je prends mon parapluie.

(v) Il n'y a pas de fumée sans feu.

Exercice 1.2 (★)

Écrire la négation, la contraposée et la réciproque de l'implication :

$$a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

Pour chacune d'entre elles, donner sa valeur de vérité.

Exercice 1.3 (★★ - ✍)

Soient $\mathscr{P}$, $\mathscr{Q}$ et $\mathscr{R}$ trois propositions logiques.

1. À l'aide d'une table de vérité, montrer que les assertions $\begin{cases} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \\ R \Rightarrow P \end{cases}$ et $\begin{cases} P \Leftrightarrow Q \\ Q \Leftrightarrow R \\ R \Leftrightarrow P \end{cases}$ sont équivalentes.

2. À l'aide des règles de calcul propositionnel vues en cours, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et $((P \wedge Q) \Rightarrow R)$;

(ii) $((P \vee Q) \Rightarrow R)$ et $((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$.

Exercice 1.4 (★★)

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;

(iii) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$;

(iv) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

Exercice 1.5 (★★)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire en français les énoncés mathématiques suivants puis écrire leur négation :

(i) $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq m$;

(ii) $\exists T > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$;

(iii) $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq M$;

(iv) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$;

(v) $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;

(vi) $\exists A \in \mathbb{R},\ \exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq A \Rightarrow f(x) = C$.

Exercice 1.6 (★★)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire mathématiquement les énoncés suivants puis écrire leur négation :

(i) f est la fonction nulle ;

(ii) f change de signe ;

(iii) f ne prend pas deux fois la même valeur ;

(iv) f présente un minimum ;

(v) f n'est pas monotone ;

(vi) f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.

Exercice 1.7 (★★ - Permutation de quantificateurs - ✍)

Soit $\mathscr{P}(x,y)$ une proposition dépendant de deux variables x et y appartenant à des ensembles E et F. Montrer que $(\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ \mathscr{P}(x,y)) \Rightarrow (\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ \mathscr{P}(x,y))$. Que dire de la réciproque ?

Modes de raisonnement

Exercice 1.8 (★ - ✍)

Soient x et y deux réels. Montrer que $\min(x,y) = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(x,y) = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercice 1.9 (★)

Prouver l'assertion suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ (x \notin \mathbb{Q}$ **ou** $\exists n \in \mathbb{N}^*, nx \in \mathbb{Z})$.

Exercice 1.10 (★★★)

Déterminer l'ensemble des réels x tels que le prédicat suivant soit vrai :

$$\forall t \in [0,1],\ (x \geq t) \Rightarrow (x \geq 2t).$$

Exercice 1.11 (★ - ✍)

Soit x un réel. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.12 (★★)

1. Démontrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.
2. Le réel $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? Même question pour $\sqrt{4 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}}$.
3. Montrer que si α est irrationnel, alors l'écriture du réel $a + \alpha b$ avec $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$ est unique.

Exercice 1.13 (★★)
Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y > 2 \Rightarrow (x > 1 \text{ ou } y > 1)$.
Écrire également la négation de cette proposition, ainsi que la réciproque de l'implication qu'elle contient. Cette réciproque est-elle vraie ?

Exercice 1.14 (★★)
Résoudre les équations ou inéquations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(i) $2x = \sqrt{x^2 + 1}$;

(ii) $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$;

(iii) $\sqrt{x-1} \geq x - 7$.

Exercice 1.15 (★★)
On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer par Analyse-Synthèse que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.

Exercice 1.16 (★★)
Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Exercice 1.17 (★★★)
1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
2. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Exercice 1.18 (★★★★)
On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

1. **Analyse.** Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer, en étudiant la quantité $(f(x) - f(y))^2$, que $\delta(x)\delta(y) = xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire la forme de f.
2. **Synthèse.** Conclure.

Raisonnement par récurrence

Exercice 1.19 (★★)
1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout n entier naturel, $0 \leq u_n \leq 4$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et déterminer une expression explicite de u_n pour tout n dans $\mathbb{N}$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n = n(n-1)$.

Exercice 1.20 (★★ - Une suite récurrente d'ordre 2)
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3, u_1 = 7$ et :

$$\forall n \geq 2,\ u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

Exercice 1.21 (★★★)
Au rugby, une équipe peut marquer 3 points (drop ou pénalité), 5 points (essai non transformé) ou 7 points (essai transformé). Déterminer l'ensemble des scores possibles.

Exercice 1.22 (★★)
Montrer que pour tout n entier naturel non nul, il existe un unique couple (p, q) d'entiers naturels tels que $n = 2^p(2q + 1)$.

Exercice 1.23 (★)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2\right)$.
Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Exercice 1.24 (★★)
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

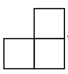
Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 1.25 (★★★)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels (ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{N}$) vérifiant les deux assertions suivantes :

- $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n = p$;
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq n$.

Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n$.

Exercice 1.26 (★★★★ - Un peu de Tétris)

On dispose d'un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ (où $n \geq 2$), que l'on souhaite remplir à l'aide d'un monomino (pièce carrée de taille 1×1 : ) et de triominos coudés .

Montrer que quelle soit la position du monomino sur l'échiquier, il est possible de paver le reste de l'échiquier avec les triominos, comme sur la figure ci-contre.