

Ensembles et relations binaires

Ensembles

Exercice 11.1 (★★)

Montrer les égalités d'ensembles suivantes :

$$(i)]-1, 1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right]; \quad (ii) [-1, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right].$$

Exercice 11.2 (★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer que $\mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$ si, et seulement si, $E \subset F$.

Exercice 11.3 (★★★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . Comparer les ensembles suivants :

$$(i) \mathcal{P}(A \cap B) \text{ et } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B); \quad | \quad (ii) \mathcal{P}(A \cup B) \text{ et } \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B).$$

Exercice 11.4 (★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$(i) A \subset B; \quad | \quad (ii) A \cap B = A; \quad | \quad (iii) A \cup B = B; \quad | \quad (iv) A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Exercice 11.5 (★★★★)

Soit E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E . Montrer que :

$$\begin{array}{ll} (i) A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C; & (iv) \overline{A} \setminus \overline{B} = B \setminus A; \\ (ii) A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B; & (v) (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C); \\ (iii) A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C \Leftrightarrow B = C; & (vi) (A \setminus B) \setminus (A \setminus C) = (A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B. \end{array}$$

Exercice 11.6 (★★★★★)

Soit E un ensemble, et soient A et B deux parties de E .

1. Montrer l'équivalence : $A \subset B \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E), A \cap X \subset B \cap X$.
2. Montrer l'équivalence : $A \cup B = E \Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{P}(E), (X \cap A = \emptyset \Rightarrow X \subset B)$.

Exercice 11.7 (★★★ - Différence symétrique)

Soit E un ensemble. On définit la *différence symétrique* de deux parties A, B de E par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B})$.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $A \Delta E$ et $A \Delta \emptyset$.

3. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = B \Delta A$ et $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
4. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = \overline{A \Delta B}$.
5. Montrer que : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$.
6. Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation $X \Delta A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice 11.8 (★★★)

Soient E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . Résoudre les équations suivantes d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

- | | | | | |
|----------------------|--|-----------------------|--|-----------------------------|
| (i) $X \cup A = B$; | | (ii) $X \cap A = B$; | | (iii) $X \setminus A = B$. |
|----------------------|--|-----------------------|--|-----------------------------|

Exercice 11.9 (★★★)

Montrer que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ n'est pas le produit cartésien de deux ensembles de $\mathbb{R}$.

Exercice 11.10 (★★)

Soient A, B, C, D des parties d'un ensemble E .

1. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
2. Montrer que $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
3. Que dire des ensembles $(A \times C) \cup (B \times D)$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$?

Exercice 11.11 (★★★)

Soient E un ensemble, n un entier naturel non nul et $A_0, A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles de E tels que

$$\emptyset = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \dots \subsetneq A_n = E.$$

On pose pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Montrer que $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ est une partition de E .

Exercice 11.12 (★★★★)

Soit E un ensemble et soient $E_1, \dots, E_n$ ($n \geq 2$) des parties deux à deux distinctes de E . Montrer que l'un au moins de ces ensembles n'en contient aucun autre.

Relations binaires

Exercice 11.13 (★)

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mathcal{R} z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$ est une relation d'équivalence. Décrire géométriquement ses classes d'équivalence.

Exercice 11.14 (★★)

Sur $\mathbb{Z}$, on définit une relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, a \mathcal{R} b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et déterminer la classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 11.15 (★★)

Soit E un ensemble non vide. On suppose qu'il existe sur E une relation $\mathcal{R}$ qui soit à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence. Que dire des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$?

Si on suppose de plus que la relation d'ordre $\mathcal{R}$ est totale, que dire de E ?

Exercice 11.16 (★★★★)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la relation de congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément $x \in \mathbb{R}$, et donner un système de représentants des classes d'équivalences.

Exercice 11.17 (★★★★★)

Soit E un ensemble non vide et soit $A \subset \mathcal{P}(E)$ une partition de E .

Montrer qu'il existe une unique relation d'équivalence $\sim$ sur E telle que A soit l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$.

Exercice 11.18 (★)

Sur $E = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$, on définit une relation $\preceq$ par :

$$\forall (z, z') \in E^2, \quad z \preceq z' \Leftrightarrow (|z| < |z'|) \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z')).$$

Montrer que $(E, \preceq)$ est un ensemble totalement ordonné.

Exercice 11.19 (★★)

On définit une relation $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ en posant $p \preceq q \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, q = p^n$. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ?

Exercice 11.20 (★★)

Soient X une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $F = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs réelles. On définit une relation binaire $\leq$ sur F de la manière suivante :

$$\forall (f, g) \in F^2, \quad f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) \leq g(x).$$

Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre sur F . À quelle condition est-ce un ordre total ?

Exercice 11.21 (★★)

On considère $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $\mid$. L'ensemble $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

Exercice 11.22 (★★★★)

Soit E un ensemble possédant au moins deux éléments. On considère l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ muni de la relation d'ordre $\subset$.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E) \setminus \{E\}$ ne possède pas de plus grand élément.
2. Montrer que l'ensemble des singletons de E ne possède pas de plus grand élément. Est-il majoré ou minoré ? Admet-il une borne supérieure ou une borne inférieure ?

Exercice 11.23 (★★★★)

Soit E un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E possède un plus grand et un plus petit élément. Montrer que E est fini.
