TD 12

Nombres réels

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 12.1 (★★)
Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides, avec B majorée et $A \subset B$.
Montrer que A admet une borne supérieure, et que $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 12.2 (★★)
Montrer que les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont bornées. Déterminer leurs bornes inférieures et supérieures :

$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$

$B = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p},\ (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, n \leq p\right\}$

$C = \left\{(-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*\right\}$

(★) $D = \{\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor,\ n \in \mathbb{N}\}$

Exercice 12.3 (★★★)
Soient A et B deux parties non vides minorées de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $A \cup B$ est minorée, et montrer que $\inf(A \cup B) = \min(\inf(A), \inf(B))$.
2. Montrer que si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $\max(\inf(A), \inf(B)) \leq \inf(A \cap B)$. Est-ce une égalité ?

Exercice 12.4 (★★)
Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $I \cap J \neq \emptyset$, montrer que $I \cup J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 12.5 (★★★)
Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments. On suppose que $x \in A$ et $x \neq \sup(A)$. Montrer que $\sup(A \backslash \{x\}) = \sup(A)$.

Exercice 12.6 (★★★)
Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$, et soit $M = \sup(A)$. On suppose que $M \notin A$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]M - \varepsilon, M[$ contient une infinité d'éléments de A.
Ce résultat reste-t-il vrai si $M \in A$?

Exercice 12.7 (★★)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On définit deux fonctions g et h sur $\mathbb{R}$ en posant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \inf\{f(y),\ y \geq x\} \text{ et } h(x) = \sup\{f(y),\ y \geq x\}.$$

Montrer que g et h sont bien définies, que $g \leq h$, et étudier les monotonies de g et h.

Exercice 12.8 (★★★★ - Parties adjacentes de $\mathbb{R}$)
Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall (a,b) \in A \times B,\ a \leq b \text{ et } \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in A \times B,\ b - a < \varepsilon.$$

Montrer que A admet une borne supérieure, B admet une borne inférieure et $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 12.9 (★★★★)

Soit A une partie bornée et non vide de $\mathbb{R}$. On appelle diamètre de A et on note $\delta(A)$ le réel

$$\sup\{|x-y|,\ (x,y)\in A^2\}.$$

1. Justifier l'existence de $\delta(A)$, puis montrer que $\delta(A)\leq \sup(A)-\inf(A)$.
2. Montrer que : $\quad \forall\varepsilon>0,\ \exists(x,y)\in A^2,\ |x-y|>\sup(A)-\inf(A)-\varepsilon.$
3. En déduire que $\delta(A)=\sup(A)-\inf(A)$

Exercice 12.10 (★★★★)

Soit $f:[a,b]\to[a,b]$ une fonction croissante. On veut montrer que f admet un point fixe.

1. Montrer que $\{x\in[a,b]\mid f(x)\geq x\}$ admet une borne supérieure s dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(s)\geq s$.
3. En déduire que $f(s)=s$.
4. Ce résultat est-il toujours valable lorsque f est décroissante ?

Parties denses

Exercice 12.11 (★★)

Montrer que $E=\{r^3, r\in\mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12.12 (Un critère de densité - ★★★)

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que :

(i) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exists(a,b)\in A^2,\ a<x<b$;

(ii) $\forall(a,b)\in A^2, \frac{a+b}{2}\in A$.

Prouver que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 12.13 (★★★★ - Morphismes de $\mathbb{R}$ - ✍)

Soit f un morphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application non nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, $f(x+y)=f(x)+f(y)$ et $f(xy)=f(x)f(y)$.

1. Montrer que $f(1)=1$, puis que $f(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$.
2. En déduire que $f(r)=r$ pour tout $r\in\mathbb{Q}$.
3. Montrer que $f(x^2)\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En déduire que f est croissante.
4. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe deux suites (a_n) et (b_n), à valeurs rationnelles, de limite x, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n\leq x\leq b_n$.
5. En déduire que $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
