TD 13

Applications

Généralités sur les applications

Exercice 13.1 (★)

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$. Déterminer les ensembles suivants (on pourra pour cela tracer la courbe représentative de f) :

$$f(\mathbb{R}),\ f([0,\pi]),\ f([-\pi/2,\pi/2]),\ f^{-1}(\{0\}),\ f^{-1}(\{\sqrt{3}/2\}),\ f^{-1}([0,1]),$$
$$f^{-1}(f(\{0\}),\ f(f^{-1}(\{0\})),\ f^{-1}(f([0,\pi/2])),\ f(f^{-1}([0,1])).$$

Exercice 13.2 (★★)

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z^2+z+1 \end{array} \right.$.

1. Déterminer $f(\mathbb{C})$, $f\left(\mathbb{C}^*\right)$ et $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{C})$, $f^{-1}\left(\mathbb{C}^*\right)$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.

Exercice 13.3 (★★★)

Soit $f : E \to F$. Prouver que pour tous $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ et $B, B' \in \mathscr{P}(F)$:

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. A-t-on égalité ?
2. $f\left(A \cup A'\right) = f(A) \cup f\left(A'\right)$ et $f\left(A \cap A'\right) \subset f(A) \cap f\left(A'\right)$. A-t-on égalité ?
3. $f^{-1}\left(B \cup B'\right) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}\left(B'\right)$ et $f^{-1}\left(B \cap B'\right) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}\left(B'\right)$.

Exercice 13.4 (★★)

Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1. Déterminer les fonctions caractéristiques de $\overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_B$.
2. Retrouver à l'aide des fonctions indicatrices que $A \cap B = A \cup B \Leftrightarrow A = B$.

Injections, surjections, bijections

Exercice 13.5 (★)

Déterminer si les applications suivantes sont injectives, surjectives ou bijectives :

$f_1 :\ x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$;

$f_2 :\ x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ de $[1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$;

$f_3 :\ (x,y) \mapsto x - y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$;

$f_4 :\ (x,y) \mapsto (x-y, -2x+2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$;

$f_5 :\ (x,y,z) \mapsto (x+2y+z, y, -x-4y+z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$;

$f_6 :\ n \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{array} \right.$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 13.6 (★)

Soient $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array} \right.$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$. Calculer $g \circ f$ puis $f \circ g$. f et g sont-elles bijectives ?

Exercice 13.7 (★★)

Soit $a \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{U}$. Considérons $f_a : z \mapsto \dfrac{z+a}{\overline{a}z+1}$.

1. Montrer que f_a est définie sur $\mathbb{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2. Montrer que f_a est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

Exercice 13.8 (★★)

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$ deux applications. On considère l'application $h : E \rightarrow F \times G$ définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = (f(x), g(x)).$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives, h est-elle surjective ?

Exercice 13.9 (★★)

Soient E, F, G trois ensembles non vides et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

Exercice 13.10 (★★)

Soit E un ensemble et f une application de E vers E.

1. Supposons que $f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective, alors $f = \mathrm{id}_E$.
2. Supposons que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 13.11 (★★★)

Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Supposons f injective. Montrer que pour tout $M, N \in \mathscr{P}(E)$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$.
2. Réciproquement, montrer que si pour tout $M, N \in \mathscr{P}(E)$, $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$, alors f est injective.

Exercice 13.12 (★★★)

Soient E et F deux ensembles, et f une application de E vers F.

1. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour tout $A \subset E$, $A = f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si, pour tout $B \subset F$, $B = f(f^{-1}(B))$.

3. On considère les applications :
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B). \end{array} \right.$$
Montrer les équivalences suivantes :
   (i) f injective $\Leftrightarrow$ φ injective $\Leftrightarrow$ ψ surjective ;
   (ii) f surjective $\Leftrightarrow$ φ surjective $\Leftrightarrow$ ψ injective.

Exercice 13.13 (★★★)

Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si, et seulement si, il existe une application surjective de F dans E.

> Supposons qu'il existe une application injective $f : E \to F$. Alors $\tilde{f} : \begin{array}{ccc} E & \to & B = \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est bijective, car injective puisque f l'est, et surjective car tout élément de $\mathrm{Im}(f)$ admet un antécédent par f, et donc par $\tilde{f}$. Elle admet donc une bijection réciproque $\tilde{f}^{-1} : B \to E$.
>
> Fixons arbitrairement un élément $a \in E$, et considérons l'application suivante :
> $$g : \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & \begin{cases} \tilde{f}^{-1}(y) & \text{si } y \in B \\ a & \text{si } y \in \overline{B} \end{cases} \end{array}.$$
> Montrons que g est surjective. Prenons pour cela $x \in E$. Puisque $\tilde{f} : E \to B$ est bijective, $x = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x)) = g(f(x))$. Ainsi x admet un antécédent par g : g est bien surjective.
>
> Supposons à présent qu'il existe une surjection g de F dans E. Pour tout x dans E, il existe donc $y_x \in F$ tel que $x = g(y_x)$. Considérons alors l'application $f : x \in E \mapsto y_x \in F$, et montrons que f est injective. Soient pour cela $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $y_{x_1} = y_{x_2}$, et en appliquant g, $x_1 = g(y_{x_1}) = g(y_{x_2}) = x_2$. Donc f définit bien une injection de E dans F.

Exercice 13.14 (★★★)

Soit E et F deux ensembles et f une application de E vers F. On définit la relation $\mathscr{R}$ sur E en posant :
$$x \mathscr{R} y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E. Décrire les classes d'équivalence de cette relation.
2. Notons $E/\mathscr{R}$ l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ et considérons l'application :
$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} E/\mathscr{R} & \to & F \\ \overline{x} & \mapsto & f(x) \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que l'application $\tilde{f}$ est bien définie, c'est-à-dire que l'image de $\overline{x}$ par $\tilde{f}$ ne dépend pas du représentant choisi dans la classe de $\overline{x}$.
   (b) Montrer que $\tilde{f}$ est une application injective.

Exercice 13.15 (★★★)

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array} \right. .$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit injective (resp. surjective, resp. bijective).
2. Dans le cas où f est bijective, déterminer son application réciproque.

Exercice 13.16 (★★★★)

Soit $f : E \to F$.

1. Montrer que pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$, $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$.
2. Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

1. On a :

$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \Leftrightarrow f(x) \notin B \Leftrightarrow f(x) \in \bar{B} \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\bar{B}).$$

D'où l'égalité souhaitée.

2. Procédons par double implication.

- Supposons dans un premier temps que f soit bijective, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$.

  Soit alors $y \in \overline{f(A)}$. Alors y admet un unique antécédent par f, qui est $x = f^{-1}(y)$. Nécessairement, x ne peut être dans A, faute de quoi on aurait $y = f(x) \in f(A)$. Donc $x \in \bar{A}$, et par conséquent, $y = f(x) \in f(\bar{A})$. Ceci prouve donc déjà que $\overline{f(A)} \subset f(\bar{A})$.

  De même, soit $y \in f(\bar{A})$. Alors l'unique antécédent de y est $x = f^{-1}(y)$, qui par hypothèse est dans $\bar{A}$. Donc f ne peut pas être l'image d'un élément de A, car cet élément serait nécessairement $x \notin A$. Donc $y \in \overline{f(A)}$, de sorte que $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

  Par double inclusion, on a donc $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$.

- Inversement, supposons que pour tout $A \in \mathscr{P}(E), f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$. En particulier, pour $A = \emptyset$, on obtient

  $$f(\bar{\emptyset}) = \overline{f(\emptyset)} = \bar{\emptyset} \Leftrightarrow f(E) = F.$$

  Donc déjà, f est surjective.

  Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Soit alors $A = \{x\}$, de sorte que $f(A)$ est le singleton $\{f(x)\}$. Alors $f(\bar{A}) = \overline{f(A)} = F \backslash \{f(x)\}$. Puisque $f(y) = f(x) \notin F \backslash \{f(x)\}$, on en déduit que $f(y) \notin f(\bar{A})$. Et donc y, qui est un antécédent de $f(y)$, ne peut appartenir à $\bar{A}$, et donc appartient à A. Mais A ne contient qu'un élément, qui est x, de sorte que $y = x$.

  Et donc f est injective, et par conséquent bijective.

Exercice 13.17 (★★★★ - Oral Polytechnique 2017)

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f + f \circ f + f \circ f \circ f = 3\text{id}$.
