TD 14

Suites

Définition de la convergence

Exercice 14.1 (★)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. On note $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, et on suppose $\ell < \ell'$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.

Exercice 14.2 (★★)

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si, et seulement si, elle est stationnaire. Que dire alors de la limite de (u_n) ?

Exercice 14.3 (★★★ - Moyennes de Césaro - ✍)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et de même monotonie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. (a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. Que pensez-vous de la réciproque ?

   (b) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi (Théorème de Césaro).
3. **Application.** Soit (w_n) une suite réelle. Montrer que si $\lim(w_{n+1} - w_n) = 0$, alors $\lim \dfrac{w_n}{n} = 0$. Donner un exemple d'une telle suite qui ne soit pas convergente.

Limites de suites

Exercice 14.4 (★★)

Déterminer les limites des suites dont le terme général est donné par :

(i) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(ii) $\dfrac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$

(iii) $\dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

(iv) $\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

(vi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

(vii) $\sqrt[n]{2 + (-1)^n}$

(viii) $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$

(ix) $(\ln(n))^{1/n}$

(x) $\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/\ln(n)}$

Exercice 14.5 (★★)

Soit (u_n) une suite bornée.

1. Montrer que l'on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup(\{u_k,\ k \geq n\})$ et $w_n = \inf(\{u_k,\ k \geq n\})$.
2. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente si, et seulement si, $\lim v_n = \lim w_n$.

Exercice 14.6 (★★★)
Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos(n\alpha)$ et $v_n = \sin(n\alpha)$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n. Même question pour v_{n+1}.
2. En déduire que si l'une des deux suites (u_n) et (v_n) converge, alors l'autre aussi.
3. Prouver alors que (u_n) et (v_n) divergent.

Exercice 14.7 (★★★ - Règle de D'Alembert - ✍)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

1. On suppose $\ell > 1$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} > \dfrac{1+\ell}{2} u_n$.
   En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
2. On suppose $\ell < 1$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
3. Donner des exemples de suites (u_n) pour lesquelles $\ell = 1$, qui tendent vers 0, qui tendent vers un réel non nul, ou encore qui tendent vers $+\infty$.

Suites adjacentes

Exercice 14.8 (★★)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, et en déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Exercice 14.9 (★★ - Théorème des segments emboîtés)
Soit $([a_n, b_n])_n$ une suite décroissante (au sens de l'inclusion) de segments non vides de $\mathbb{R}$ et dont les longueurs tendent vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.

Exercice 14.10 (★★★ - Moyenne arithmético-géométrique)
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 \leq a \leq b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, puis qu'elles convergent vers la même limite. *Cette limite est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b.*

Suites implicites et suites récurrentes

Exercice 14.11 (★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.

2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice 14.12 (★★★)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + x^2 + \cdots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note x_n cette solution.

2. Montrer que la suite (x_n) est monotone, puis convergente, et calculer sa limite.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons f_n la fonction polynomiale définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

   On applique le théorème de la bijection à f_n sur $[0, +\infty[$:

   - f_n est **continue sur** $[0, +\infty[$ en tant que fonction polynômiale ;
   - f_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

     Ainsi $f_n'(x) > 0$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. La fonction f_n est donc **strictement croissante sur** $[0, +\infty[$;
   - $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

   La fonction f_n réalise donc une bijection de l'intervalle $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. Puisque $0 \in [-1, +\infty[$, l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0, +\infty[$ possède une unique solution x_n.

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - 1 = \sum_{k=1}^{n} x^k - 1 + x^{n+1} = f_n(x) + x^{n+1}.$$

   D'où en prenant $x = x_n$ dans cette égalité :

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + x_n^{n+1} = x_n^{n+1} \geq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

   car $f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$ et $x_n^{n+1} \geq 0$. La fonction f_{n+1} étant strictement croissante, on obtient :

$$x_n \geq x_{n+1}.$$

   Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la suite (x_n) est donc décroissante. Puisqu'elle est également minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \geq 0$.

   Reste à déterminer ℓ. Pour cela, regardons les premiers termes de la suite (x_n) :

   - pour $n = 1$, $f_1 : x \mapsto x - 1$ s'annule en un unique réel positif $x_1 = 1$;

- pour $n = 2$, $f_2 : x \mapsto x^2+x-1$ est une fonction polynomiale de degré 2, de discriminant égal à 5, et admet pour racines réelles $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. L'unique racine positive est donc $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \in [0,1[$.

Puisque (x_n) est décroissante, pour tout $n \geq 2$:

$$0 \leq x_n \leq x_2 < 1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Reprenons à présent l'égalité $f_n(x_n) = 0$, elle se récrit (en reconnaissant une somme géométrique et en notant que $x_n \neq 1$) :

$$x_n \frac{1 - x_n^{n+1}}{1 - x_n} = 1. \qquad (*)$$

On sait que $\lim x_n = \ell$. Reste le terme en x_n^{n+1} qui nous embête un peu. Pour cela, remarquons que :

$$0 \leq x_n^{n+1} \leq x_2^{n+1}.$$

Puisque $x_2 \in]-1,1[$, $\lim x_2^{n+1} = 0$, et par théorème des gendarmes, $\lim x_n^{n+1}$ existe et vaut 0.

Passons à la limite quand $n \to +\infty$ dans $(*)$ (on a montré que tout converge) :

$$\ell \frac{1}{1-\ell} = 1, \qquad \text{d'où} \qquad \ell = \frac{1}{2}.$$

La suite (x_n) converge donc vers $\dfrac{1}{2}$.

Exercice 14.13 (★)
Donner le terme général des suites définies par :

(i) $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n + 2$;

(ii) $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \lambda v_n + 3$, où λ est une constante réelle.

Exercice 14.14 (★)
Donner le terme général et étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(i) $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4} u_n$;

(ii) $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{2} u_n$;

(iii) $u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

Exercice 14.15 (★★)
Étudier les suites définies par :

(i) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n(1-u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$ et $u_0 = 1/2$;

(iii) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et $u_0 = 1$;

(iv) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 14.16 (★★ - Méthode de Héron pour le calcul approché de $\sqrt{2}$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \dfrac{|u_n - \sqrt{2}|^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \sqrt{2}| \leq \dfrac{1}{2^{2^n - 1}}$. Qu'en déduit-on sur la suite (u_n) ?
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice 14.17 (★★★)

On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = re^{i\theta}$ $(-\pi \leq \theta \leq \pi)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

On désigne par r_n le module de z_n et par θ_n l'argument de z_n tel que $-\pi \leq \theta_n \leq \pi$.

1. Effectuer la construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n.
2. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et de θ_n, et en déduire $\lim \theta_n$.
3. Étudier la suite $u_n = r_n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$, et en déduire r_n et $\lim r_n$, puis $\lim z_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les complexes z_n et $|z_n|$ sont sur le même cercle de centre 0 et de rayon $|z_n|$. Le complexe z_{n+1} est alors le milieu du segment d'extrémités z_n et $|z_n|$. Par construction, on remarquera que :
$$|z_{n+1}| \leq |z_n| \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$
En particulier, on notera que $\theta_n \in]-\pi, \pi[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qu'on pourrait démontrer facilement par récurrence).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2} = \frac{r_n e^{i\theta_n} + r_n}{2} = r_n e^{i\frac{\theta_n}{2}} \frac{e^{i\frac{\theta_n}{2}} + e^{-i\frac{\theta_n}{2}}}{2} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\frac{\theta_n}{2}}.$$
Puisque $\dfrac{\theta_n}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) > 0$. Par unicité de l'écriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :
$$r_{n+1} = r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \quad \text{et} \quad \theta_{n+1} = \frac{\theta_n}{2}.$$
La suite (θ_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\theta_n = \dfrac{\theta}{2^n}$, et (θ_n) converge vers 0.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :
$$\begin{aligned} u_{n+1} = r_{n+1} \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) &= r_n \cos\left(\frac{\theta_n}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = r_n \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{2} r_n \sin\left(2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} r_n. \end{aligned}$$
La suite (u_n) est également géométrique de raison $\frac{1}{2}$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \frac{1}{2^n} u_0 = \frac{1}{2^n} r \sin(\theta).$$

Si $\theta = 0$, alors $z_n = |z_n|$ et la suite (z_n) est constante égale à r.

Supposons $\theta \neq 0$. Puisque $\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right) \neq 0$, on obtient :

$$r_n = \frac{u_n}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)} = \frac{r\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}.$$

Or :

$$2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \theta \frac{\sin\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)}{\dfrac{\theta}{2^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \theta.$$

Ainsi, la suite (r_n) converge vers $\dfrac{r\sin(\theta)}{\theta}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_n = r_n \cos(\theta_n) + i r_n \sin(\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{r\sin(\theta)}{\theta}.$$

Suites extraites

Exercice 14.18 (★)

Montrer que la suite de terme général u_n n'a pas de limite dans les deux cas suivants :

(i) $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(ii) (★) u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 14.19 (★★)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$. Montrer que toute suite réelle périodique et convergente est constante.

Exercice 14.20 (★★)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans les deux cas suivants :

(i) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent ;

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 14.21 (★★★ - ✍)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non bornée. Montrer qu'elle admet une sous-suite qui tend vers l'infini.

Exercice 14.22 (★★★)

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n - (-1)^n}$. Montrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.

Exercice 14.23 (★★★★)

Soit (z_n) une suite complexe. On suppose que :

$$\forall p, q \in \mathbb{N},\ p \neq q \Rightarrow |z_p - z_q| \geq 1.$$

Prouver que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 14.24 (★★★★★ - Oral ENS)

1. Soit (u_n) une suite bornée. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que toute suite convergente extraite de (u_n) possède ℓ pour limite. Montrer que (u_n) est convergente.
2. Soit (v_n) une suite bornée telle que $v_n + \dfrac{v_{2n}}{2}$ converge vers un réel ℓ. Montrer que (v_n) est convergente.

Caractérisations séquentielles

Exercice 14.25 (★★)

Déterminer les bornes supérieures et inférieures, si elles existent, des ensembles de réels suivants :

$$A = \left\{\frac{(-1)^n n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\right\},\quad B = \left\{\frac{pq}{p^2+q^2},\ (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\},\quad C = \left\{\frac{2^n}{2^m + 3^{n+m}},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

Exercice 14.26 (★★★)

Dans cet exercice, on note $A = \{\sqrt{n} - \sqrt{m},\ (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.
2. Soit $r \in \mathbb{Q}$, et soient $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tels que $r = \frac{p}{q}$.
   (a) Justifier que pour n suffisamment grand, le réel $u_n = \sqrt{q^2n^2 + 2np} - \sqrt{q^2n^2}$ est bien défini.
   (b) Prouver que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$.
3. En déduire que A est dense dans $\mathbb{R}$.

> 1. On reconnaît le taux d'accroissement en 0 de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$. Puisque f est dérivable sur $]-1,+\infty[$, avec $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$:
>
> $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = f'(0) = \frac{1}{2}.$$
>
> 2. (a) Il s'agit surtout de s'assurer que pour n suffisamment grand, $q^2n^2 + 2np$ est positif, ce qui n'est pas automatique si $r < 0$ car $p < 0$. Mais $q^2n^2 + 2np = n\left(q^2n + 2p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, si bien qu'à partir d'un certain rang, $q^2n^2 + 2np > 0$.
>   (b) Pour n suffisamment grand pour que u_n soit défini :
>
> $$u_n = \sqrt{q^2n^2}\left(\sqrt{1+\frac{2np}{q^2n^2}} - 1\right) = qn\left(\sqrt{1+\frac{2p}{q^2n}} - 1\right) = \frac{2p}{q} \times \frac{q^2n}{2p}\left(\sqrt{1+\frac{2p}{q^2n}} - 1\right).$$
>
> Mais par la question 1, puisque $\frac{2p}{q^2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{q^2 n}{2p}\left(\sqrt{1+\frac{2p}{q^2 n}}-1\right)=\frac{\sqrt{1+\frac{2p}{q^2 n}}-1}{\frac{2p}{q^2 n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2}.$$

Et donc $\sqrt{q^2n^2+2np}-\sqrt{q^2n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{2p}{q}\frac{1}{2}=\frac{p}{q}=r$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$, et soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $r_n=\frac{p_n}{q_n}\in\mathbb{Q}$ tel que $x-\frac{1}{2n}<r_n<x+\frac{1}{2n}$. Et par la question précédente, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\left|\sqrt{q_n^2n_0^2+2n_0p_n}-\sqrt{q_n^2n_0^2}-r_n\right|<\frac{1}{2n}$.

   Posons alors $v_n=\sqrt{q_n^2n_0^2+2n_0p_n}-\sqrt{q_n^2n_0^2}$, qui est un élément de A. Alors :

   $$|v_n-x|\leq|v_n-r_n|+|r_n-x|<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\leq\frac{1}{n}.$$

   Et donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=x$, si bien que x est la limite d'une suite d'éléments de A. Ceci étant vrai pour tout réel x, A est dense dans $\mathbb{R}$.