TD 15

Dénombrement

Dénombrements

Exercice 15.1 (★)

Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot INFO ? De 8 lettres ? De 9 lettres?

Exercice 15.2 (★)

Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ?

Exercice 15.3 (★)

Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à n éléments ?

Exercice 15.4 (★★)

Combien les mots suivants ont-ils d'anagrammes (mot obtenu par permutation des lettres) ?

(i) ROOSEVELT (ii) RIKIKI (iii) ABRACADABRA

Exercice 15.5 (★★)

Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent :

(i) un seul élément de $[\![1, p]\!]$? (ii) au moins un élément de $[\![1, p]\!]$?

Exercice 15.6 (★★★ - Compositions d'un entier)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On note C_n^p le nombre de suites $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant la condition $x_1 + \cdots + x_p = n$.

1. Déterminer C_n^p en considérant les symboles « 1 » et « + » dans l'écriture $x_1 + \cdots + x_p = n$.
2. On cherche à calculer C_n^p d'une autre manière.

   (a) Établir : $C_n^{p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k^p$.

   (b) En déduire : $C_n^p = \binom{n+p-1}{n}$.

Exercice 15.7 (★★)

Dans un polygone convexe on appelle diagonale tout segment qui relie deux sommets non consécutifs. Combien de côtés doit posséder un polygone qui possède autant de sommets que de diagonales ?

Exercice 15.8 (★★)

De combien de manières peut-on placer p tours sur un échiquier de taille $n \times n$ de manière à ce qu'aucune ne puisse en prendre une autre ?

On rappelle qu'aux échecs une tour ne peut se déplacer que le long d'une ligne ou d'une colonne.

> Pour obtenir une telle configuration :
>
> - on choisit p lignes de l'échiquier parmi n, ce qui représente $\binom{n}{p}$ possibilités ;
> - **puis** pour chaque ligne, on choisit l'emplacement de la tour sur cette ligne. Plus précisément pour la première ligne (celle avec le plus petit numéro), on a n emplacements possibles. **Puis** $(n-1)$ emplacements possibles pour la deuxième ligne et la deuxième tour, jusqu'à la ligne p pour laquelle on a $(n-p+1)$ possibilités pour placer la tour p.
>
> Par le principe des bergers, le nombre de telles configurations est donc :
>
> $$\binom{n}{p} n(n-1)\dots(n-p+1) = \binom{n}{p}\frac{n!}{(n-p)!}.$$

Exercice 15.9 (★★)
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 15.10 (★★ - Le poker)
Rappelons qu'un jeu de poker contient 32 cartes, c'est-à-dire 8 (du 7 à l'as) de chaque couleur. Une main est formée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

(i) une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?

(ii) une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?

(iii) exactement trois trèfles ?

(iv) exactement un as et deux cœurs ?

Exercice 15.11 (★)
Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0, 1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

Exercice 15.12 (★★★)
On considère l'ensemble $[\![1, 100]\!]$ dont on fixe une sous-partie X de cardinal 10. Montrer qu'il existe deux sous-parties de X distinctes dont la somme des éléments est égale.

Exercice 15.13 (★★★★ - Oral X)
Montrer qu'un ensemble E est infini si, et seulement si, pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E), A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

Dénombrements ensemblistes

Exercice 15.14 (★★ - Formule de Vandermonde)

Soient $(m,r,n) \in \mathbb{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Exercice 15.15 (★★)

Soient $n \geq p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 15.16 (★★★)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

(i) $\displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \mathrm{Card}(X)$ (ii) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X \cap Y)$ (iii) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X \cup Y)$.

Exercice 15.17 (★★ - Banque CCINP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 15.18 (★★)

Soit E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E telles que $A \cup B = E$.

Exercice 15.19 (★★★ - Dénombrement par construction d'une bijection)

Soit E un ensemble de cardinal n. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A,B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur E par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \begin{cases} \mathscr{C} & \longrightarrow & \{0,1,2\}^E \\ (A,B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{cases}$ est bijective, et conclure.

Dénombrements d'applications

Exercice 15.20 (★★★★)

Soit E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n. On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de E dans F.

1. Déterminer $S_{p,2}$, $S_{p,3}$, $S_{p,p}$.

2. On suppose $p > 1$, $n > 1$ et l'on introduit a un élément arbitraire de E. En étudiant la restriction d'une surjection de E dans F à $E \setminus \{a\}$, établir :
$$S_{p,n} = n\left(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}\right).$$
3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $p \geq 1$:
$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

1. Remarquons que $S_{p,2} = 0$ si $p = 1$. Pour $p \geq 2$, il y a 2^p applications de E dans $F = \{y_1, y_2\}$. Parmi celles-ci, seules deux applications ne sont pas surjectives, les applications constantes $k \mapsto y_1$ et $k \mapsto y_2$.

   Le nombre de surjections de E dans F est donc $S_{p,2} = 2^n - 2$.

   De même, $S_{p,3} = 0$ si $p = 1$ ou 2. Pour $p \geq 3$, il y a 3^p applications de E dans $F = \{y_1, y_2, y_3\}$. Parmi celles-ci, les applications non surjectives sont :

   - les applications constantes : il y en a 3 ;
   - les applications f dont l'image est $\{y_1, y_2\}$, $\{y_1, y_3\}$ ou $\{y_2, y_3\}$. Et dans chacun de ces cas, il y a $S_{p,2} = 2^n - 2$ telles applications.

   Le nombre de surjections recherchées est donc :
$$S_{p,3} = 3^n - 3 - 3(2^n - 2). = 3^n - 3 \times 2^n + 3.$$

   Enfin lorsque $p = n$, le cardinal des ensembles de départ et d'arrivée étant égaux, une application est surjective si, et seulement si, elle est bijective. Et le nombre de bijections de E dans lui-même est $p!$. D'où $S_{p,p} = p!$.

2. Soit f une surjection de E dans F. Notons $b = f(a)$, et considérons $g = f_{|E\setminus\{a\}}$.

   Puisque f est surjective, b admet au moins un antécédent par f. Deux cas sont possibles :

   - soit b admet un unique antécédent par f, qui est alors a. Dans ce cas, g est une application surjective de $E\setminus\{a\}$ dans $F\setminus\{b\}$. Et réciproquement, une telle application g se prolonge en une surjection de E dans F en associant à a l'élément b de F.

     Il y a dans ce cas n choix possibles pour choisir l'élément $f(a)$, et $S_{p-1,n-1}$ surjections g possibles de $E \setminus \{a\}$ dans $F \setminus \{f(a)\}$. Soit au total $nS_{p-1,n-1}$ surjections dont la restriction à $E \setminus \{a\}$ n'est pas surjective.
   - soit b admet au moins deux antécédents par f. Dans ce cas, g est une application surjective de $E \setminus \{a\}$ dans F. Et réciproquement, pour une telle application g, elle se prolonge en une surjection de E dans F en associant à a n'importe quel élément de F.

     Il y a dans ce cas $S_{p-1,n}$ surjections g possibles de $E \setminus \{a\}$ dans F, et n choix possibles pour l'image de a. Soit au total $nS_{p-1,n}$ surjections de ce type.

   Ainsi, le nombre $S_{p,n}$ de surjections de E dans F est égal à :
$$S_{p,n} = nS_{p-1,n-1} + nS_{p-1,n} = n(S_{p-1,n-1} + S_{p-1,n}).$$

3. On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathscr{P}(p)$: « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{p,n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$ ».

$\boxed{\textbf{I}}$ Pour $p = 1$ et $n = 1$, $S_{1,1} = 1$ et on vérifie :

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = 0 + 1 = 1.$$

Si $n > 1$, $S_{1,n} = 0$ et on vérifie à l'aide de la formule du binôme que :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} n = n(-1+1)^{n-1} = 0.$$

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété au rang $p-1$. Pour $n = 1$, $S_{p,1} = 1$ et on vérifie que :

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^p = 0 + 1^p = 1.$$

Pour $n \geq 2$, on utilise l'identité de la question précédente et l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= n(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}) \\ &= n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{p-1} + n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \binom{n-1}{k} k^{p-1}. \end{aligned}$$

On ajoute un terme nul pour $k = n$ dans la deuxième somme puis on combine les deux sommes avant d'employer la formule du triangle de Pascal puis la formule du capitaine :

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right) k^{p-1} = n \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k-1} k^{p-1} \\ &= \underbrace{0}_{k=0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p. \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang p.

On conclut par principe de récurrence.

Exercice 15.21 (★★★)

1. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$?
2. (a) Soit $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ croissante. Montrer que l'application $g : k \mapsto f(k) + k - 1$ est strictement croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n + p - 1]\!]$.

   (b) Soit $g : [\![1, p]\!] \to [\![1, n + p - 1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k) - k + 1$ est croissante de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

   (c) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$.

1. Notons tout d'abord qu'une application strictement croissante est injective. Par conséquent, si $p > n$, il n'y a pas de telle application.

   Supposons $p \leq n$. Une application $g : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ strictement croissante est totalement déterminée par son image. En effet, si $\mathrm{Im}(g) = \{y_1, \dots, y_p\}$ avec $y_1 < y_2 < \cdots < y_p$, alors nécessairement $g(i) = y_i$ pour tout $1 \leq i \leq p$ par stricte croissance.

   Ainsi, les applications strictement croissantes de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ sont en bijection avec les

p-combinaisons de $[\![1,n]\!]$. Il y en a donc $\binom{n}{p}$.

2. (a) L'application g est bien à valeurs dans $[\![1,n+p-1]\!]$ puisque pour tout $k \in [\![1,p]\!]$:

$$1 \leq f(1) \leq f(k)+k-1 \leq f(p)+p-1 \leq n+p-1.$$

Montrons qu'elle est strictement croissante. Soit pour cela $1 \leq k < \ell \leq p$. Par croissance de f :

$$g(k) = f(k)+k-1 \leq f(\ell)+k-1 < f(\ell)+\ell-1 = g(\ell).$$

Donc g est strictement croissante.

(b) Inversement, prenons $g : [\![1,p]\!] \to [\![1,n+p-1]\!]$ strictement croissante. Montrons que $f : k \mapsto g(k)-k+1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Soient $k, \ell \in [\![1,p]\!]$ avec $k \leq \ell$. Puisque g est strictement croissante :

$$g(\ell)-g(k) = \sum_{i=k+1}^{\ell} \underbrace{g(i)-g(i-1)}_{\geq 1} \geq \ell - k.$$

D'où :

$$f(\ell)-f(k) \geq g(\ell)-g(k)-(\ell-k) \geq 0.$$

Donc l'application f est croissante. Comme de plus $f(1) = g(1) \geq 1$ et $f(p) = g(p)-p+1 \leq n+p-1-p+1 = n$, f est bien à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

(c) Les questions précédentes établissent une correspondance bijective entre les applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ et les applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$. Par la question 1, le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est donc $\binom{n+p-1}{p}$.

Exercice 15.22 (★★★ - Formule du crible)

1. Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}\,(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \mathrm{Card}\,(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\mathrm{Card}(I)-1}\, \mathrm{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).\end{aligned}$$

2. **Application.** On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible, prouver que :

$$\mathrm{Card}(D_n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

1. Notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : "si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E, alors

$$\text{Card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \text{''}.$$

Montrons par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

I Pour $n = 2$, c'est une formule du cours.

H Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des parties finies de E. Alors :

$$\begin{aligned}
&\text{Card}(A_1 \cup \ldots \cup A_{n+1}) \\
&= \text{Card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \text{Card}(A_{n+1}) - \text{Card}((A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \quad (\text{cas } n = 2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) + \text{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \text{Card}((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})) \quad (\text{avec } \mathscr{P}(n)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) + \text{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1}\right) \quad (\text{avec } \mathscr{P}(n)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) + \text{Card}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^{\ell} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{\ell-1} \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{ell-1}} \cap A_{n+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_{\ell-1} \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{ell-1}} \cap A_{n+1}\right)
\end{aligned}$$

On remarque que, dans la première somme, il y a tous les termes avec des intersections de k des $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sans A_{n+1}. Et dans la seconde somme, il y a tous les termes avec des intersections de ℓ des $A_1, \ldots, A_{n+1}$ avec A_{n+1}. Donc ces deux sommes peuvent se regrouper en une seule :

$$\text{Card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right),$$

et ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, nous avons donc démontré la formule du crible.

2. Dans le cas qui nous intéresse, remarquons que $D_n = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$. Or, avec la formule du crible,

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \text{Card}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right).$$

On remarque que la somme intérieure, à k fixé, contient $\dbinom{n}{k}$ termes.

De plus, l'intersection de k des A_i est formée par les permutations qui fixent k points donnés de $[\![1, n]\!]$. Elles sont au même nombre que les permutations des $n-k$ nombres restants, c'est-à-dire $(n-k)!$. Donc :

$$\mathrm{Card}(\overline{D_n}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

et finalement

$$\mathrm{Card}(D_n) = \mathrm{Card}(\mathfrak{S}(E)) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
