TD 15

Dénombrement

Dénombrements

Exercice 15.1 (★)

Combien y a-t-il de mots de 7 lettres contenant le mot INFO ? De 8 lettres ? De 9 lettres?

Exercice 15.2 (★)

Lors de son inscription à un site de commerce en ligne, un utilisateur se voit demander un mot de passe contenant 6 à 8 caractères, un tel mot de passe étant formé de lettres majuscules et de chiffres, et contenant au moins une lettre. Combien de mots de passe sont-ils possibles ?

Exercice 15.3 (★)

Combien de relations d'ordre total existe-t-il sur un ensemble à n éléments ?

Exercice 15.4 (★★)

Combien les mots suivants ont-ils d'anagrammes (mot obtenu par permutation des lettres) ?

(i) ROOSEVELT (ii) RIKIKI (iii) ABRACADABRA

Exercice 15.5 (★★)

Soient $p \leqslant n$ deux entiers naturels non nuls. Combien existe-t-il de parties de $[\![1, n]\!]$ qui contiennent :

(i) un seul élément de $[\![1, p]\!]$? (ii) au moins un élément de $[\![1, p]\!]$?

Exercice 15.6 (★★★ - Compositions d'un entier)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On note C_n^p le nombre de suites $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ vérifiant la condition $x_1 + \cdots + x_p = n$.

1. Déterminer C_n^p en considérant les symboles « 1 » et « + » dans l'écriture $x_1 + \cdots + x_p = n$.
2. On cherche à calculer C_n^p d'une autre manière.
   (a) Établir : $C_n^{p+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_k^p$.
   (b) En déduire : $C_n^p = \binom{n+p-1}{n}$.

Exercice 15.7 (★★)

Dans un polygone convexe on appelle diagonale tout segment qui relie deux sommets non consécutifs. Combien de côtés doit posséder un polygone qui possède autant de sommets que de diagonales ?

Exercice 15.8 (★★)

De combien de manières peut-on placer p tours sur un échiquier de taille $n \times n$ de manière à ce qu'aucune ne puisse en prendre une autre ?
On rappelle qu'aux échecs une tour ne peut se déplacer que le long d'une ligne ou d'une colonne.

Exercice 15.9 (★★)
Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
   (a) En tenant compte de l'ordre, combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 15.10 (★★ - Le poker)
Rappelons qu'un jeu de poker contient 32 cartes, c'est-à-dire 8 (du 7 à l'as) de chaque couleur. Une main est formée de 5 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

(i) une quinte flush (cinq cartes consécutives de même couleur) ?

(ii) une couleur (5 cartes de même couleur, qui ne forment pas une quinte flush) ?

(iii) exactement trois trèfles ?

(iv) exactement un as et deux cœurs ?

Exercice 15.11 (★)
Soient $x_0, \dots, x_n$ des réels de l'intervalle $[0,1[$. Prouver qu'il en existe deux qui sont à distance strictement inférieure à $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

Exercice 15.12 (★★★)
On considère l'ensemble $[\![1,100]\!]$ dont on fixe une sous-partie X de cardinal 10. Montrer qu'il existe deux sous-parties de X distinctes dont la somme des éléments est égale.

Exercice 15.13 (★★★★ - Oral X)
Montrer qu'un ensemble E est infini si, et seulement si, pour toute application $f : E \to E$, il existe $A \in \mathscr{P}(E), A \neq \emptyset$ et $A \neq E$ tel que $f(A) \subset A$.

Dénombrements ensemblistes

Exercice 15.14 (★★ - Formule de Vandermonde)
Soient $(m,r,n) \in \mathbb{N}^3$. À l'aide d'arguments combinatoires, prouver la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{n+m}{r}.$$

Exercice 15.15 (★★)
Soient $n \geq p$ deux entiers naturels. Prouver par dénombrement que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Exercice 15.16 (★★★)
Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geq 1$. Calculer :

(i) $\displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \operatorname{Card}(X)$ (ii) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cap Y)$ (iii) $\displaystyle\sum_{(X,Y) \in \mathscr{P}(E)^2} \operatorname{Card}(X \cup Y)$.

Exercice 15.17 (★★ - Banque CCINP)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$.
2. Déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \cap B = \emptyset$.
3. Déterminer le nombre de triplets $(A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.

Exercice 15.18 (★★)
Soit E un ensemble de cardinal n.
Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$.

Exercice 15.19 (★★★ - Dénombrement par construction d'une bijection)
Soit E un ensemble de cardinal n. On souhaite déterminer le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \subset B$. Notons $\mathscr{C} = \{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 \mid A \subset B\}$.

Pour $(A, B) \in \mathscr{C}$, on note $\chi_{A,B}$ la fonction définie sur E par $\chi_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin B \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A \\ 2 & \text{si } x \in A \end{cases}$.

Montrer que $\chi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C} & \longrightarrow & \{0, 1, 2\}^E \\ (A, B) & \longmapsto & \chi_{A,B} \end{array} \right.$ est bijective, et conclure.

Dénombrements d'applications

Exercice 15.20 (★★★★)
Soit E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs p et n. On note $S_{p,n}$ le nombre de surjections de E dans F.

1. Déterminer $S_{p,2}$, $S_{p,3}$, $S_{p,p}$.
2. On suppose $p > 1$, $n > 1$ et l'on introduit a un élément arbitraire de E. En étudiant la restriction d'une surjection de E dans F à $E \setminus \{a\}$, établir :
$$S_{p,n} = n\left(S_{p-1,n} + S_{p-1,n-1}\right).$$
3. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $p \geq 1$:
$$S_{p,n} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

Exercice 15.21 (★★★)

1. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$?

2. (a) Soit $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ croissante. Montrer que l'application $g : k \mapsto f(k)+k-1$ est strictement croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n+p-1]\!]$.

   (b) Soit $g : [\![1,p]\!] \to [\![1,n+p-1]\!]$ strictement croissante. Montrer que $f : k \mapsto g(k)-k+1$ est croissante de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

   (c) En déduire le nombre d'applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.

Exercice 15.22 (★★★ - Formule du crible)

1. Prouver par récurrence sur $n \geqslant 2$ la formule du crible : si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E, alors

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{\substack{I \subset [\![1,n]\!] \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\operatorname{Card}(I)-1} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right).\end{aligned}$$

2. **Application.** On note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sans points fixes. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, on note $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$. En appliquant la formule du crible, prouver que :

$$\operatorname{Card}(D_n) = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$
