

Structures algébriques

Lois de compositions internes

Exercice 19.1 (★)

On pose pour tout $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$: $x \star y = x + y - xy$.

1. Montrer que $\star$ définit une loi de composition interne commutative et associative sur $[0, 1]$ avec élément neutre.
2. Quels sont les éléments inversibles de $([0, 1], \star)$?

Groupe

Exercice 19.2 (★★)

On munit $E =]-1, 1[$ de la loi de composition $*$ définie pour tout $(x, y) \in E^2$ par : $x * y = \frac{x + y}{1 + xy}$.

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur E .
2. Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que la fonction th est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(E, *)$.

Exercice 19.3 (★★)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si H est ou non un sous-groupe de G .

- | | |
|---|--|
| (i) $G = (\mathbb{C}^*, \times)$, $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$. | de G dont tous les coefficients sont dans $\mathbb{Z}$. |
| (ii) $G = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, H l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de G . | (iv) $G = \text{GL}_n(\mathbb{R})$, H l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux valent 1. |
| (iii) $G = \text{GL}_2(\mathbb{R})$, H l'ensemble des éléments | (v) $G = \mathfrak{S}_n$, $H = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(1) = 2\}$. |

Exercice 19.4 (★★)

Dans cet exercice, on note G l'ensemble des similitudes directes du plan, qu'on assimile à l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = az + b$.

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe, et qu'il n'est pas abélien.
2. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On pose $G_{z_0} = \{g \in G \mid g(z_0) = z_0\}$.
Montrer que G_{z_0} est un sous-groupe de G , isomorphe à $\mathbb{C}^*$. Est-il abélien ?
3. Soit H l'ensemble des homothéties et des translations du plan. Montrer que H est un sous-groupe de G . Est-il abélien ?

Exercice 19.5 (★★ - Centre d'un groupe - 📖)

Soit $(G, *)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble $\mathcal{Z}(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x * y = y * x\}$.

1. Montrer que $\mathcal{Z}(G)$ est un sous-groupe de G . À quelle condition a-t-on $\mathcal{Z}(G) = G$?
2. Déterminer $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$ lorsque $n \geq 2$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Que dire si $n = 1$?

Indication : montrer que si $M \in \mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))$, alors M commute avec toute matrice élémentaire.

Exercice 19.6 (★★★ - Union de sous-groupes)

1. Donner un exemple de deux sous-groupes de $(\mathbb{R}^*, \times)$ dont l'union n'est pas un sous-groupe.
2. Soit G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe si, et seulement si, $H \subset K$ ou $K \subset H$.
3. Soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de sous-groupes de G . Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G .

Exercice 19.7 (★★★ - Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ -)

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble $n\mathbb{Z} = \{nk, k \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.
2. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$.
 - (a) Justifier l'existence du minimum n_0 de l'ensemble $E = \{h \in H \mid h > 0\}$.
 - (b) Montrer que $n_0\mathbb{Z} \subset H$.
 - (c) Soit $h \in H$. En considérant la division euclidienne de h par n_0 , montrer que $h \in n_0\mathbb{Z}$.
 - (d) Que peut-on en conclure sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$?
3. Soit $(G, *)$ un groupe fini d'élément neutre e , et $a \in G$.
 - (a) Montrer que l'application $\varphi_a : p \in \mathbb{Z} \mapsto a^p \in G$ est un morphisme de groupes.
 - (b) En déduire l'existence et l'unicité d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$\begin{cases} a^n = e, \\ \forall p \in \mathbb{Z}, a^p = e \Leftrightarrow n \mid p \end{cases}.$$

Exercice 19.8 (★★★ - Un cas particulier du théorème de Lagrange -)

Soit G un groupe commutatif fini, de cardinal n .

1. Soit $g \in G$. Montrer que $x \mapsto gx$ est une bijection de G sur lui-même.
2. Soit $g \in G$. En calculant de deux manières le produit $\prod_{x \in G} (gx)$, montrer que $g^n = 1_G$.
3. Déterminer tous les sous-groupes finis de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Exercice 19.9 (★★ - Automorphismes intérieurs -)

Soit G un groupe multiplicatif. Pour $a \in G$, on note $f_a : x \in G \mapsto a x a^{-1} \in G$.

1. Montrer que pour tout $a \in G$, f_a est un automorphisme de G .
2. Montrer que $\varphi : a \in G \mapsto f_a \in \mathrm{Aut}(G)$ est un morphisme de groupes.
3. Déterminer le noyau de φ .

Exercice 19.10 (★★★)

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$, puis de $(\mathbb{Q}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 19.11 (★★★)

Les groupes suivants sont-ils isomorphes :

- | | |
|--|---|
| (i) $\mathbb{U}_5$ et $\mathbb{U}_2 \times \mathbb{U}_2$; | (iii) $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$; |
| (ii) $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$; | (iv) $\mathfrak{S}_X$ et $\mathfrak{S}_Y$ lorsque X et Y sont en bijection. |

Exercice 19.12 (★★★)

Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes de G . On pose $HK = \{h * k, h \in H, k \in K\}$.

1. Si G est abélien, montrer que HK est un sous-groupe de G .
2. Prouver que HK est un sous-groupe de G si, et seulement si, $HK = KH$.
3. Si H et K sont finis et si $H \cap K = \{e\}$ (où e désigne l'élément neutre de G), montrer que $\text{Card}(HK) = \text{Card}(H) \cdot \text{Card}(K)$.

Exercice 19.13 (★★★★)

Soit G un groupe non réduit à un élément tel que pour tout $g \in G$, $g^2 = e$.

1. Montrer que G est abélien.
2. Montrer que G possède au moins un sous-groupe de cardinal 2.
3. On suppose que G contient au moins trois éléments. Soit H un sous-groupe fini de G , différent de $\{e\}$ ou de G , et soit $g \in G \setminus H$. On pose alors $gH = \{gh, h \in H\}$.
 - (a) Montrer que $H \cup gH$ est un sous-groupe de cardinal $2|H|$.
 - (b) Montrer que si G est fini, alors son cardinal est une puissance de 2.

Exercice 19.14 (★★★★)

1. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.
 - (a) Montrer l'existence de $a = \inf\{h \in H \mid h > 0\}$.
 - (b) Montrer que si $a > 0$, alors $H = a\mathbb{Z}$.
 - (c) Montrer que si $a = 0$, alors H est une partie dense de $\mathbb{R}$.
2. **Application.** On admet que π est irrationnel. Prouver que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. En déduire que l'ensemble $A = \{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Anneaux, corps**Exercice 19.15 (★)**

On note A l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Z}$.

Montrer que A est un anneau pour l'addition et la multiplication matricielles, puis déterminer $\mathcal{U}(A)$.

Exercice 19.16 (★★)

L'anneau $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \times)$ est-il intègre ? Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.

Exercice 19.17 (★★)

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ fixé. On pose $A_a = \left\{ \frac{p}{a^n} \mid p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$.

1. Montrer que A_a est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
2. Montrer $\mathcal{U}(A_2) = \{\pm 2^k, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. Déterminer $\mathcal{U}(A_{10})$.

Exercice 19.18 (★★)

1. On rappelle que $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$, $|z|^2 \in \mathbb{N}$, puis en déduire $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + ib\sqrt{2}, a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, puis déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}])$.

Exercice 19.19 (★★ - Produit direct d'anneaux - 🐝)

Soient $(A, +_A, \times_A)$ et $(B, +_B, \times_B)$ deux anneaux. On munit $A \times B$ de deux lois de composition $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a +_A a', b +_B b') \text{ et } (a, b) \otimes (a', b') = (a \times_A a', b \times_B b')$$

Montrer que $(A \times B, \oplus, \otimes)$ est un anneau, commutatif si A et B le sont. Cet anneau est-il intègre ?

Exercice 19.20 (★★)

Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-anneaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'anneau des suites réelles ?

- | | |
|---|--|
| (i) l'ensemble des suites de limite nulle ; | (vi) l'ensemble des suites (u_n) telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$; |
| (ii) l'ensemble des suites croissantes ; | (vii) l'ensemble des suites stationnaires ; |
| (iii) l'ensemble des suites convergentes ; | (viii) l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. |
| (iv) l'ensemble des suites divergentes ; | |
| (v) l'ensemble des suites bornées ; | |

Exercice 19.21 (★★ - Anneau de Boole)

Soit A un anneau non nul pour lequel $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $x = -x$.
2. Montrer que A est commutatif.
3. Déterminer A dans le cas où A est intègre.
4. On définit une relation binaire $\preceq$ sur A en posant pour tous $x, y \in A$: $x \preceq y \Leftrightarrow yx = x$.

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre.

Exercice 19.22 (★★★★)

Montrer qu'un anneau commutatif intègre fini est un corps.

Exercice 19.23 (★★★★)

Prouver que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps et déterminer tous ses automorphismes.