

Analyse asymptotique

Relations de comparaison : cas des suites

Exercice 20.1 (★)

Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

1. $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{2}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{n}} - o(e^{-n}) - \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}.$
2. $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n \ln(n)} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)}\right).$
3. $w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) + n^2 + o(n\sqrt{n}) + n \ln(n)\sqrt{n} + o(n^2 \ln(\ln(n))).$

Exercice 20.2 (★★)

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. Si (u_n) est bornée et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) est bornée.
2. Si (u_n) converge et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge.
3. Si (u_n) converge vers 0 et si $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors (v_n) converge vers 0.
4. Si (u_n) est bornée et si $v_n = o(u_n)$, alors (v_n) converge.
5. Si $u_n = (2n - 1)^3$, alors :
 $\square u_n = o(n^3) \quad \square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 8n^3 \quad \square u_n = o(n^4) \quad \square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^3 \quad \square u_n = o\left(\frac{n^4}{2}\right)$
6. Si $u_n = \frac{2}{n} - \frac{3}{n\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$, alors :
 $\square u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n} \quad \square u_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \square \frac{1}{n} = o(u_n) \quad \square u_n = \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \square u_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$
7. Soit (u_n) une suite réelle. Alors $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$.
8. Soient $(u_n), (v_n), (a_n), (b_n)$ des suites telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(a_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$.
 $\square$ si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n) \quad \square$ si $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$.
9. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors :
 $\square u_n + 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n + 1 \quad \square 2u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \quad \square -u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -v_n \quad \square u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n^2$
 $\square \ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(v_n) \quad \square e^{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{v_n}$

Exercice 20.3 (★★)

Trouver un équivalent simple des suites :

$$\begin{array}{l|l|l}
 a_n = \exp\left(\frac{1-\sqrt{n}}{1+n}\right) - 1 ; & e_n = n(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{5}) ; & j_n = \frac{(1-\ln(n))(3n^2+1)}{\sqrt{n^2+2n}} ; \\
 b_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right) ; & f_n = (2^n + 3^n)^{\frac{1}{n}} ; & k_n = \frac{\exp\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right) - e}{\exp\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(n+1+\frac{1}{n}\right)} ; \\
 c_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} ; & g_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}} ; & l_n = \ln(n+1) - \ln(n-1) ; \\
 d_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n^3+1}} ; & h_n = (n+1)^n ; & m_n = e^{\arccos(\frac{1}{n})} - e^{\frac{\pi}{2}} .
 \end{array}$$

Exercice 20.4 (★★)

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n k!$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n!$.

Exercice 20.5 (★★)

Déterminer un équivalent simple de $u_n = \sqrt{n}^n + n\sqrt{n} + n^{n/2}$.

Exercice 20.6 (★)

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites à termes strictement positifs. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ et que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$. Que dire de (v_n) ?

Exercice 20.7 (★★★)

Soit (u_n) une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
2. En déduire un équivalent simple de (u_n) .

Exercice 20.8 (★★★)

Soient (u_n) , (v_n) , (w_n) , (t_n) des suites de réels strictement positifs telles que $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$.

1. Montrer que $u_n + w_n \sim v_n + t_n$.
2. Ce résultat est-il encore valable si on ne suppose plus les suites (u_n) , (v_n) , (w_n) , (t_n) à termes strictement positifs ?

Exercice 20.9 (★★★)

Montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$u_n = \int_{n^2}^{n^3} \frac{dt}{1+t^2} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 20.10 (★★)

Déterminer les limites des suites suivantes :

$$a_n = \frac{3n^2 + (-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2} + \ln(n)} ;$$

$$b_n = \frac{n \sin(n)}{1 + n^2} ;$$

$$c_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n+2} ;$$

$$d_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^2} ;$$

$$e_n = n \sqrt{\ln\left(1 + \frac{2}{n^2+1}\right)} ;$$

$$f_n = \frac{\operatorname{ch}(\operatorname{sh}(n))}{\operatorname{sh}(\operatorname{ch}(2n))} ;$$

$$g_n = n^2 \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{n+1}\right) \right) ;$$

$$h_n = n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{27} - 1 \right) ;$$

$$i_n = (n+1) \left(n^{1/n} - 1 \right).$$

Exercice 20.11 (★★)

Calculer la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)!}{\sqrt{n} 2^{2n} (n!)^2}$.

Exercice 20.12 (★★★★)

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, établir que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$.

Exercice 20.13 (★★★★ - Développement asymptotique d'une suite implicite)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution strictement positive que l'on notera u_n .
2. Montrer que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.
3. Prouver que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, puis que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 20.14 (★★★★ - Étude d'une suite implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $x^n + \ln(x) = 0$ possède une unique solution $x_n > 0$.
2. Déterminer la limite de x_n .
3. On pose $u_n = 1 - x_n$. Justifier que $nu_n \sim -\ln(u_n)$, puis déterminer un équivalent de u_n .

Relations de comparaison : cas des fonctions**Exercice 20.15 (★★)**

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes :

$$(i) \frac{(1 - e^x) \sin(x)}{x^2 + x^3} \text{ en } 0 ;$$

$$(ii) \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \text{ en } +\infty ;$$

$$(iii) \ln(\cos(x)) \text{ en } 0 ;$$

$$(iv) \ln(\sin(x)) \text{ en } 0 ;$$

$$(v) \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \text{ en } 0 ;$$

$$(vi) x^2 \ln(1+x) + x \cos(x) \text{ en } +\infty ;$$

- | | |
|--|---|
| (vii) $\frac{\ln(x)}{1-x^2}$ en 1 ;

(viii) $\frac{xe^x - x^2}{\operatorname{ch}(x)}$ en $+\infty$; | (ix) $\frac{\tan(x - x \cos(x))}{\sin(x) + \cos(x) - 1}$ en 0 ;

(x) $(x+1)\ln(x) - x\ln(x+1)$ en $+\infty$;

(xi) $\cos(ax) - \cos(bx)$ en 0. |
|--|---|
-

Exercice 20.16 (★★)

Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|---|
| (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) \ln(1 + \ln(1+x))$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan(x))^{1/\sin(x)}$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(x)}{x^x - 1}$;

(iv) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x^2} - 1}{\ln(x)}$;

(v) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln((\sin(x))^2)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$; | (vi) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) \tan(2x)$;

(vii) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x^2 - 3x + 1) \tan(\pi x)$;

(viii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x}$;

(ix) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} \right)^{x \ln(x)}$. |
|---|---|
-

Exercice 20.17 (★★)

- Soit $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\ln(x)} \right)$. Prouver que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$.
 - En déduire la limite en $+\infty$ de $(e^{f(x)} - 1) \ln(x)$.
 - Soit $g(x) = \left[\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^x - 1 \right] \ln(x)$. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
-

Exercice 20.18 (★★★ - Composition à gauche d'un équivalent par le logarithme)

Soient f et g des fonctions définies sur un intervalle I à valeurs réelles, et $a \in I$. On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et que f et g sont strictement positives au voisinage de a .

- On suppose $\ell \neq 1$. Montrer que $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$.
 - Ce résultat subsiste-t-il si $\ell = 1$?
-