

Polynômes

Premiers calculs dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 21.1 (★★ - Valuation d'un polynôme - 📌)

On définit l'application valuation sur $\mathbb{K}[X]$ par

$$\text{val}(P) = \begin{cases} +\infty & \text{si } P = 0 \\ \sup\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k < n, a_k = 0\} & \text{si } P \neq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer la valuation des polynômes $X^2 + 1$, $X^4 + 3X$, X^n .
2. Montrer que :

(i) si $P \neq 0$, $\text{val}(P) \leq \deg(P)$; (ii) $\text{val}(\lambda \cdot P) = \text{val}(P)$ pour tout $\lambda \neq 0$;		(iii) $\text{val}(P + Q) \geq \min\{\text{val}(P), \text{val}(Q)\}$; (iv) $\text{val}(PQ) = \text{val}(P) + \text{val}(Q)$.
---	--	--

Exercice 21.2 (★★ - Équations polynomiales)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :

(i) $P'(X)^2 = 4P(X)$;	(ii) $P \circ P = P$;	(iii) $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.
-------------------------	------------------------	---------------------------------

Exercice 21.3 (★★ - Formule de Vandermonde)

Soient $m, n, r \in \mathbb{N}$. En développant de deux manières le produit $(1 + X)^m(1 + X)^n$, déterminer la valeur de $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k} \binom{n}{r-k}$.

Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 21.4 (★)

Dans les cas suivants, calculer $A \wedge B$ et déterminer des polynômes U et V tels que $AU + BV = A \wedge B$.

- (i) $A = X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X^2 - 3X - 2$ et $B = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 7X + 6$.
- (ii) $A = X^6 - 2X^5 + 2X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 2X$ et $B = 2X^4 - 4X^3 + 2X^2 - 2X + 2$.

Exercice 21.5 (★★)

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne :

(i) de $X^n(X + 1)^2$ par $(X - 1)(X - 2)$;		(ii) de $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.
--	--	---

Exercice 21.6 (★★)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P = X(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de A .
 2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de X^n par P .
 3. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
-

Exercice 21.7 (★★)

Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$. En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

Exercice 21.8 (★★)

Montrer que pour $n, p \in \mathbb{N}^*$: $(X^n - 1) \wedge (X^p - 1) = X^{n \wedge p} - 1$.

Exercice 21.9 (★★ - Deux questions indépendantes)

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $A \wedge B = 1$ si, et seulement si, $(AB) \wedge (A+B) = 1$.
 2. Montrer que $A^2 \mid B^2$ si, et seulement si, $A \mid B$.
-

Exercice 21.10 (★★)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $A_i = \prod_{j \neq i}^n (X - a_j)$.

Montrer que les polynômes $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Sont-ils premiers entre eux deux à deux ?

Exercice 21.11 (★★★)

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. Montrer que si A divise B dans $\mathbb{C}[X]$, alors A divise B dans $\mathbb{R}[X]$.
 2. Montrer que le PGCD de A et B dans $\mathbb{C}[X]$ est égal au PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
 3. Quels sont les entiers naturels n tels que $X^2 + X + 1$ divise $X^{2n} + X^n + 1$?
-

Racines**Exercice 21.12 (★★)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $X(X+1)(2X+1)$ divise $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$.
2. Montrer que $(X-1)^3$ divise $B = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$.
3. Déterminer a et b pour que $C = aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette la racine double 1. Quel est alors le quotient de $P(X)$ par $(X-1)^2$?

Exercice 21.13 (★★)

Soient $n \geq 2$ et $P = 1 + X + \frac{X^2}{2!} \dots + \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{R}[X]$.

1. Calculer $P - P'$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 21.14 (★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire dont tous les coefficients sont des entiers relatifs.

1. Prouver que toute racine rationnelle de P est dans $\mathbb{Z}$.
2. Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt[k]{d}$ est soit entier, soit irrationnel.

Exercice 21.15 (★★)

Montrer que les seuls polynômes périodiques $P \in \mathbb{C}[X]$ (c'est-à-dire tels que il existe $k \in \mathbb{C}^*$ tel que $P(X+k) = P(X)$) sont les polynômes constants.

Exercice 21.16 (★★)

La fonction $z \mapsto \bar{z}$ est-elle polynomiale ?

Exercice 21.17 (★★★)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Supposons P scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.
2. Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que P' est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer alors $P \wedge P'$ en fonction des racines de P et de leurs multiplicité.

Exercice 21.18 (★★)

1. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que l'application $x \in \mathbb{C} \mapsto P(x) \in \mathbb{C}$ est surjective ? injective ?
2. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$?

Exercice 21.19 (★★★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $L_n = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)}$.

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .
2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.
3. Montrer que L_n admet n racines réelles distinctes appartenant à $] -1, 1[$.

Exercice 21.20 (★★★)

Quels sont les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 21.21 (★★★★ - D'après Centrale-Supélec)

Le but de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{C}[X]$ l'équation $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Montrer que si P est un polynôme non nul vérifiant cette relation, alors l'ensemble de ses racines est contenu dans $\{0, -1, j, j^2\}$.
 2. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation.
-

Exercice 21.22 (★★★★)

Soient m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2, premiers entre eux. Montrer que $(X^m - 1)(X^n - 1)$ divise $(X^{mn} - 1)(X - 1)$.

Ce résultat reste-t-il vrai si m et n ne sont pas premiers entre eux ?

Factorisation**Exercice 21.23 (★)**

Soit le polynôme $P(X) = X^4 + (-4 + 2i)X^3 + (12 - 8i)X^2 + (4 + 26i)X - 13$.

1. Montrer que $-i$ est une racine de P . Préciser son ordre de multiplicité.
 2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
-

Exercice 21.24 (★★)

Montrer que $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$ possède j comme racine double. En déduire sa factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 21.25 (★★★★)

Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^{2n} - 2\cos(\theta)X^n + 1$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 21.26 (★★★★)

Soit n un entier strictement positif.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = (X+1)^n - (X-1)^n$.
 2. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^{2p} \cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{(-1)^p}{2p+1}$, puis $\prod_{k=1}^p \cotan\left(\frac{k\pi}{2p+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.
-

Exercice 21.27 (★★★ - Polynômes de Tchebychev -)

On étudie pour tout $n \in \mathbb{N}$ les polynômes $T_n \in \mathbb{R}[X]$ qui vérifient :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

1. Montrer que si T_n existe, alors il est unique.
2. Vérifier que $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n existe et vérifie la relation

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

4. Déterminer la parité de T_n , son degré ainsi que son coefficient dominant.
5. Déterminer l'ensemble des racines de T_n , et en déduire sa décomposition en produits d'irréductibles.
6. En déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n/2}}{2^{n-1}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(x^2 - 1)T_n''(x) + xT_n'(x) = n^2T_n(x).$$

Exercice 21.28 (★★★★)

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\mathcal{S}_1 \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = -3 \\ xyz = -2 \end{cases} \quad ; \quad \left| \quad \mathcal{S}_2 \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases} \right.$$

Exercice 21.29 (★★★★)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 0$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note s_k la somme des racines (comptées avec multiplicité) de $P^{(k)}$.

Montrer que $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$ est une progression arithmétique dont on précisera la raison.

Exercice 21.30 (★★★★★)

Soit $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Calculer $\prod_{\substack{0 \leq k, \ell \leq n-1 \\ k \neq \ell}} (\zeta^k - \zeta^\ell)$.

Polynômes de Lagrange

Exercice 21.31 (★★)

Soient $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les

sommes $\sum_{i=1}^n L_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i L_i$.

Exercice 21.32 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t) dt =$

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice 21.33 (★★★★★)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$.

Fractions rationnelles

Exercice 21.34 (★★)

Décomposer en éléments simples :

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{X^3}{X^2 - 3X + 2} \text{ dans } \mathbb{R}[X] ; \\ F_2 &= \frac{X^3 + X^2 + 1}{X^3 + X^2 + X} \text{ dans } \mathbb{C}[X] ; \end{aligned} \right| \begin{aligned} F_3 &= \frac{X}{X^3 - 1} \text{ dans } \mathbb{R}[X] ; \\ F_4 &= \frac{1}{(X^2 + 1)(X^2 + X + 2)} \text{ dans } \mathbb{R}[X]. \end{aligned}$$

Exercice 21.35 (★★ - Un air de déjà vu - 🐞)

1. Soit $P = \lambda \prod_{i=1}^k (X - \alpha_i)^{m_i}$ un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$. Montrer que : $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{X - \alpha_i}$.
 2. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.
-

Exercice 21.36 (★★)

Montrer que $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_7} \frac{1}{2 - \omega} = \frac{448}{127}$.

Exercice 21.37 (★★★★)

Soit $n \geq 2$. Donner la forme irréductible de la fraction $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega}$.

Exercice 21.38 (★★★★ - Dérivée d'une fraction rationnelle)

1. Soit $R = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que la fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$ ne dépend pas du choix du représentant (A, B) de R .

On appelle *dérivée de R* , et on note R' la fraction rationnelle $\frac{A'B - AB'}{B^2}$.

2. Montrer que pour tous $R, S \in \mathbb{K}(X)$, $(R + S)' = R' + S'$, $(RS)' = R'S + RS'$ et si S est non nulle, $\left(\frac{R}{S}\right)' = \frac{R'S - RS'}{S^2}$.
 3. Étudier le degré de F' en fonction de celui de F .
 4. Montrer qu'il n'existe pas de fraction F de $\mathbb{K}(X)$ vérifiant $F' = 1/X$.
-