TD 22

Développements limités

Calculs de développements limités

Exercice 22.1 (★ - Des sommes)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$f_1 : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$, $n = 4$;

$f_2 : x \mapsto \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$, $n = 3$;

$f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \ln(1+2x)$, $n = 3$;

$f_4 : x \mapsto e^{-x} + \ln(1+x)$, $n = 5$.

Exercice 22.2 (★★ - Des produits)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$f_1 : x \mapsto \operatorname{sh}(x)\tan(x)$, $n = 3$;

$f_2 : x \mapsto \sin(x)\sqrt{1+x}\ln(1-2x)$, $n = 4$;

$f_3 : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$, $n = 3$;

$f_4 : x \mapsto \operatorname{ch}(x^2)\arctan(x)$, $n = 5$.

Exercice 22.3 (★★★ - Encore des produits (en anticipant les ordres))

Déterminer, avec le moins de calculs possibles, les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre n.

- $f_1 : x \mapsto \left(\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}\right)(\cos(x) - 1)$, $n = 6$;
- $f_2 : x \mapsto (1 - \cos(2x))(e^{-x} - 1)(x - \sin(x))$, $n = 7$.

Exercice 22.4 (★★ - Des compositions)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$f_1 : x \mapsto e^{\sin(x)}$, $n = 4$;

$f_2 : x \mapsto \sqrt{1+\operatorname{sh}(x)}$, $n = 3$;

$f_3 : x \mapsto \ln(1+\cos(x))$, $n = 3$;

$f_4 : x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$, $n = 3$;

$f_5 : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n = 3$;

$f_6 : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n = 3$.

Exercice 22.5 (★★ - Des quotients)

Calculer les développements limités des fonctions suivantes à l'ordre n en 0 :

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$, $n = 2$;

$f_2 : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos(x)}$, $n = 4$;

$f_3 : x \mapsto \operatorname{th}(x)$, $n = 5$;

$f_4 : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x^2}}{x\arctan(x)}$, $n = 5$.

Exercice 22.6 (★★ - Développements limités ailleurs que 0)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes en a à l'ordre n :

$f_1 : x \mapsto \ln(x)$, $a = e$, $n = 4$;

$f_2 : x \mapsto e^x$, $a = 1$, $n = 4$;

$f_3 : x \mapsto \cos(x)$, $a = \frac{\pi}{3}$, $n = 4$;

$f_4 : x \mapsto \arcsin(x)^2$, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n = 2$;

$f_5 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$, $a = 1$, $n = 3$.

Exercice 22.7 (★★★ - Plus difficile)

Calculer le développement limité des fonctions suivantes en 0 à l'ordre n :

$f_1 : x \mapsto (1 + \arctan(x))^{\frac{x}{\sin(x)^2}}$, $n = 2$;

$f_2 : x \mapsto e^{\cos(x)}\left(1 + e^{-\frac{1}{x^2}}\right)$, $n = 5$;

$f_3 : x \mapsto \arctan(e^x)$, $n = 3$;

$f_4 : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{\arcsin(x)}$, $n = 4$;

$f_5 : x \mapsto \arcsin(\sin(x)^2)$, $n = 6$;

$f_6 : x \mapsto \dfrac{\ln(1 + e^x) - \ln(2)}{x\cos(x)\sqrt{1 - \sin(x)}}$, $n = 2$.

Exercice 22.8 (★★★ - Développement limité de la fonction tangente)

1. Former le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
2. Prolonger ce développement limité à l'ordre 5 en exploitant $\tan(\arctan(x)) = x$.
3. Prolonger ce développement limité à l'ordre 7 en exploitant $(\tan)'(x) = 1 + \tan(x)^2$.

Exercice 22.9 (★★★)

Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 22.10 (★★)

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2\tan(x) - x$.

1. Montrer que f admet une bijection réciproque impaire et de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Donner le $DL_6(0)$ de f^{-1}. *On rappelle que* $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Applications des développements limités

Exercice 22.11 (★★★)

Calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1} - \sqrt{x^2+1}$;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)^2}$;

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin(x)^2}}$;

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(e - \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$;

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x^x - a^x}$ (où $a > 0$).

Exercice 22.12 (★★★)

Déterminer des équivalents des suites suivantes :

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\ ; \qquad v_n = \frac{n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{e^{1/n^2}-1} - 1\ ; \qquad w_n = \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n \ (a,b>0).$$

Exercice 22.13 (★★)

Montrer que $f : x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ se prolonge en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 22.14 (★★ - Dérivation des développements limités)

1. Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
   (a) Montrer à l'aide d'un développement limité que l'on peut prolonger f en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction dérivée de f admet-elle un développement limité en 0 ?
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle contenant 0.

   Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la partie régulière du $DL_n(0)$ de f' est obtenue en dérivant la partie régulière du $DL_{n+1}(0)$ de f.

Exercice 22.15 (★★ - Développement limité d'une solution d'une équation différentielle)

Après avoir justifié qu'il existe une unique fonction $y :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ solution de $2(1+x)y' - y = e^x$ et qui s'annule en 0, déterminer le $DL_4(0)$ de cette fonction.

Exercice 22.16 (★★★)

1. À l'aide d'une décomposition en éléments simples, déterminer le développement limité à l'ordre n en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)}$.
2. En exprimant le même développement limité d'une autre manière, déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le cardinal de l'ensemble $\left\{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2 \mid k + 2\ell = n\right\}$.

Exercice 22.17 (★★★)

1. Déterminer le $DL_3(0)$ de $\sqrt{1+t}$. On notera $a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ sa partie régulière.
2. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $1 + X = \left(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3\right)^2 + X^4 Q(X)$.
3. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0$. Déterminer une racine carrée de $I_n + N$, c'est-à-dire une matrice dont le carré est $I_n + N$.

Exercice 22.18 (★★★)

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n-ème en 0 de $x \mapsto \arcsin(x)$.

Exercice 22.19 (★★)
Déterminer pour les fonctions suivantes l'équation de la tangente en a et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente :

- $f_1 : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 2)$ en $a = 0$;
- $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x}(e^{\sin x} - 1)$ en $a = 0$;
- $f_3 : x \mapsto \sqrt{\tan x}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$.

Développements asymptotiques

Exercice 22.20 (★★)
Déterminer les asymptotes obliques au voisinage de $+\infty$ des fonctions f suivantes, et déterminer leur position par rapport à $\mathscr{C}_f$.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x-1} e^{1/x}$;

$f_2 : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1} \arctan(x)$.

Exercice 22.21 (★★)
Former un développement asymptotique en 0 de la fonction $x \mapsto (ex)^x$ à la précision $x^2 \ln^2(x)$.

Exercice 22.22 (★★★)
1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution dans $I_n = \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n. On définit ainsi une suite $(x_n)_{n \geq 0}$.
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. Montrer que $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$.
4. Chercher un équivalent de $x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}$.
5. Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 22.23 (★★★★)
Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x + \sqrt[3]{x} = n.$$

1. Montrer que cette équation possède une unique solution x_n.
2. Déterminer la limite puis un équivalent simple de la suite (x_n).
3. Donner un développement asymptotique à trois termes de la suite (x_n).

Exercice 22.24 (★★★★)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Trouver $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
