

Dimension finie

Dimension d'un espace vectoriel

Exercice 25.1 (★★)

Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels, en déterminer la dimension.

$$\begin{array}{l}
 F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\}. \\
 F_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 5y - 3z = 0 \\ -x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \right\}.
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 F_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid (X - 1)P' - XP'' = 2P\}. \\
 F_4 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.
 \end{array}
 \right.$$

Exercice 25.2 (★★)

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E est de dimension finie en tant que \mathbb{R} espace vectoriel et que $\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \times \dim_{\mathbb{C}} E$.

Exercice 25.3 (★★★)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'ensemble des suites réelles p -périodiques (c'est-à-dire des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$) est un espace vectoriel, et en déterminer la dimension.

Exercice 25.4 (★★★)

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), AM = MA\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\max_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathcal{C}(A))$ et $\min_{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})} \dim(\mathcal{C}(A))$.

Familles de vecteurs

Exercice 25.5 (★)

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $u_k = (k, k - 1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que (u_1, u_2, \dots, u_n) est une base de \mathbb{R}^n .

Exercice 25.6 (★★)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $f_a : x \mapsto \sin(x + a)$, $f_b : x \mapsto \sin(x + b)$, $f_c : x \mapsto \sin(x + c)$ est liée dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 25.7 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On pose $f_k : x \mapsto \cos^k(x)$ et $g_k : x \mapsto \cos(kx)$.

1. Montrer que $\mathcal{F} = (f_0, \dots, f_n)$ et $\mathcal{G} = (g_0, \dots, g_n)$ sont deux familles libres de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
On pourra procéder par récurrence pour la famille \mathcal{G} .
2. Soit $F_n = \text{Vect}(f_0, \dots, f_n)$ et $G_n = \text{Vect}(g_0, \dots, g_n)$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_k \in G_n$.
3. Montrer que $F_n = G_n$.

Exercice 25.8 (★★★)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(X^n, (X+1)^n, \dots, (X+n)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 25.9 (★★★ - Polynômes de Newton)

Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. Vérifier que $P_k(m)$ est entier pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire tous les polynômes P prenant des valeurs entières sur chaque entier.

Exercice 25.10 (★★★ - Caractérisation de l'inversibilité d'une matrice)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) A est une matrice inversible ;
- (ii) la famille formée par les colonnes de A est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$;
- (iii) la famille formée par les lignes de A est une base de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$.

Exercice 25.11 (★★★★★ - Polynôme minimal d'une matrice)

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note I l'ensemble des polynômes annulateurs de A .

1. Justifier que I n'est pas réduit au polynôme nul.
2. Montrer que I est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, et que pour tous $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in I$, $P \times Q$ appartient à I .
3. Montrer qu'il existe un polynôme non nul de I de degré minimal. Soit K un tel polynôme. Montrer que K divise tous les polynômes de I .
4. En déduire qu'il existe un unique polynôme annulateur de A , unitaire et de degré minimal.
On l'appelle le *polynôme minimal de A* , et on le note π_A .
5. Montrer que $\text{Vect}(I_n, A, A^2, \dots)$ est de dimension finie égale à $\deg(\pi_A)$.

Rang**Exercice 25.12 (★★)**

Déterminer le rang des familles suivantes :

1. $x_1 = (1, 0, 2)$, $x_2 = (-1, 2, -1)$, $x_3 = (2, 3, 0)$, $x_4 = (1, 0, -1)$, $x_5 = (2, 1, -1)$;
2. $x_1 = (1, 1, 0, 1)$, $x_2 = (1, -1, 1, 0)$, $x_3 = (2, 0, 1, 1)$, $x_4 = (0, -2, 1, -1)$;
3. $P_1 = X^2 + X - 3$, $P_2 = X^2 - X - 3$, $P_3 = 2X^2 - X - 6$.

Exercice 25.13 (★★)

Dans \mathbb{R}^3 , soient $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, 1, 2)$, $w = (1, 2, 2)$, $t = (2, 2, 2)$.

Montrer que (u, v, w, t) est générateur de \mathbb{R}^3 , et en extraire une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 25.14 (★★★★)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, \mathcal{F} et \mathcal{F}' des familles finies de E , \mathcal{F}'' la famille obtenue par concaténation de \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Montrer que :

$$\max(\text{rg}(\mathcal{F}), \text{rg}(\mathcal{F}')) \leq \text{rg}(\mathcal{F}'') \leq \text{rg}(\mathcal{F}) + \text{rg}(\mathcal{F}').$$

Somme de sous-espaces**Exercice 25.15 (★)**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie, tels que $\dim(F) + \dim(G) > \dim(E)$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Exercice 25.16 (★★)

Dans \mathbb{R}^4 , on considère les vecteurs $a = (0, 1, -1, 2)$, $b = (1, 3, 0, 2)$, $c = (2, 1, -3, 4)$, $d = (0, 0, 2, 1)$ et $e = (-1, 1, 0, 3)$. On pose $F = \text{Vect}(a, b, c)$ et $G = \text{Vect}(d, e)$. Déterminer les dimensions de F , G , $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 25.17 (★★)

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E dans les cas suivants :

- $E = \mathbb{R}^4$, $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2z + t = 0 \\ 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \right\}$, $G = \text{Vect}((1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 1))$.
 - $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(X^2) = X^2P(X)\}$, $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(2)\}$.
-

Exercice 25.18 (★★)

- Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y + 2z = 0\}$. Déterminer une base de F , sa dimension et un supplémentaire.
 - Mêmes questions avec $G = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}$.
-

Exercice 25.19 (★★★★ - Matrices symétriques et antisymétriques de taille n - )

- Montrer que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- En déduire que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 25.20 (★★★★ - Supplémentaire commun)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , et F, G deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension $p < n$.

- Montrer que $F \cup G \neq E$. En déduire qu'il existe x appartenant à $E \setminus (F \cup G)$.
 - En raisonnant par récurrence sur $k = n - p$, montrer qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.
-

Sous-espaces affines

Exercice 25.21 (★★)

Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines.

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases} \right\} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \mathcal{F}_3 = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}. \\ \mathcal{F}_4 = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(1) = 2 \text{ et } f(2) = -3\}. \\ \mathcal{F}_5 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(k) = \sqrt{k}\}. \end{array} \right.$$

$$\mathcal{F}_2 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{tr}(M) = 1\}.$$

Exercice 25.22 (★★)

Soit E un espace vectoriel, et soient $\mathcal{F} = A + F$ et $\mathcal{G} = B + G$ deux sous-espaces affines de E . Montrer que :

- (i) $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ si, et seulement si, $\begin{cases} F \subset G \\ \overrightarrow{AB} \in G \end{cases}$.
- (ii) $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} \in F + G$.
-

Exercice 25.23 (★★★)

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines disjoints d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E .

Montrer qu'il existe deux sous-espaces affines \mathcal{F}' et \mathcal{G}' , parallèles et disjoints, contenant respectivement \mathcal{F} et \mathcal{G} .

Exercice 25.24 (★★★)

Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux sous-espaces affines de E de directions respectives F et G .

1. Montrer que si F et G sont supplémentaires dans E , alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est réduit à un point.
 2. En déduire que, dans un espace de dimension 3, l'intersection d'un plan avec une droite non parallèle à ce plan est réduite à un point.
-