

## Espaces probabilisés finis

### Calculs de probabilités

#### Exercice 28.1 (★)

Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir des numéros de la même parité dans les différents cas suivants :

- (i) tirages simultanés ;                      |                      (ii) tirages avec remise ;                      |                      (iii) tirages sans remise.

#### Exercice 28.2 (★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel non nul. On effectue  $n$  lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est  $p$ , avec  $p \in ]0, 1[$ . On pose  $q = 1 - p$ .

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces  $n$  lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au  $n$ -ème lancer ? Et le  $k$ -ème face au  $n$ -ème lancer ?

#### Exercice 28.3 (★★)

On lance 6 fois un dé équilibré. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une fois chaque face ?

Prenons  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ , muni de sa probabilité uniforme (car le dé est équilibré).

Une issue qui réalise l'événement  $A$  : "les 6 numéros sont sortis" est la donnée d'une permutation de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Il y a  $6!$  permutations de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Donc, par équiprobabilité,

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5}{324}.$$

#### Exercice 28.4 (★★)

Soient  $A$  et  $B$  deux événements d'un espace probabilisé fini. On note alors  $C$  l'événement « un et un seul des événements  $A$  ou  $B$  est réalisé ».

1. Exprimer  $C$  en fonction de  $A$  et  $B$ .
2. Prouver que  $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$ .

#### Exercice 28.5 (★★ - Paradoxe des anniversaires)

Dans un groupe de  $n$  personnes, on considère que chaque personne a autant de chance d'être née chacun des 365 jours de l'année. Quelle est la probabilité que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

#### Exercice 28.6 (★★)

On lance  $n \geq 2$  fois une pièce équilibrée, et on considère les événements :

- $A$  : « on obtient au plus une fois pile »,
- $B$  : « les résultats des différents lancers ne sont pas tous identiques ».

Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

### Exercice 28.7 (★★)

À quelle(s) condition(s) sur les réels  $x$  et  $y$  existe-t-il une probabilité  $P$  sur l'ensemble à 3 éléments  $\Omega = \{a, b, c\}$  vérifiant :

$$P(\{a, b\}) = x \quad \text{et} \quad P(\{b, c\}) = y.$$

### Exercice 28.8 (★★★)

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 1, et  $E = \llbracket 1, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $n$ .

On choisit au hasard deux parties  $A$  et  $B$  de  $E$ , toutes les parties, y compris la partie vide, ayant la même probabilité d'être choisie. Calculer la probabilité de l'événement  $[A \cap B = \emptyset]$ .

### Exercice 28.9 (★★★ - Oral Centrale PC)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $2n$  boules,  $n$  blanches et  $n$  noires. On tire les boules deux par deux jusqu'à vider l'urne. Quelle est la probabilité qu'à chaque tirage, on ait obtenu une boule blanche et une boule noire ?

Notons  $A_i$  l'événement "les deux boules obtenues lors du  $i$ -ième tirage sont de couleurs différentes".

Alors l'événement dont on cherche la probabilité est  $A = \bigcap_{i=1}^n A_i$ .

On a alors, avec la formule des probabilités composées,

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

Lors du premier tirage, il y a  $\binom{2n}{2}$  tirages possibles. Parmi ceux-ci,  $\binom{n}{2}$  sont formés de deux boules blanches et  $\binom{n}{2}$  de deux boules noires, et donc  $2\binom{n}{2}$  réalisent  $\overline{A_1}$ . Donc

$$P(A_1) = 1 - \frac{2\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n}{2n-1}.$$

Si  $A_1$  est réalisé, l'urne contient  $n-1$  boules blanches et  $n-1$  boules noires. Avec un raisonnement analogue au précédent, on obtient :

$$P_{A_1}(A_2) = 1 - \frac{2\binom{n-1}{2}}{\binom{2(n-1)}{2}} = \frac{n-1}{2n-3}.$$

Et plus généralement, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , si  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$  sont réalisés, alors lors du  $k$ -ième tirage, l'urne contient  $n-k$  boules de chaque couleur. Et donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k) = 1 - \frac{2\binom{n-(k-1)}{2}}{\binom{2(n-(k-1))}{2}} = \frac{n-k+1}{2n-2k+1}.$$

Finalement,

$$P(A) = \frac{n}{2n-1} \times \frac{n-1}{2n-3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}.$$

Comme

$$1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1) = \frac{(2n)!}{2 \times 4 \times \dots \times 2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!},$$

on obtient finalement

$$P(A) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}.$$

### Exercice 28.10 (★★★★ - Indicatrice d'Euler)

Soit  $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$  un entier naturel non nul, décomposé en produit de facteurs premiers. On note  $\varphi(n)$  le nombre d'entiers compris entre 1 et  $n$  qui sont premiers avec  $n$ . On se propose de montrer que :

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{p_r}\right).$$

Soit  $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$  muni de la probabilité uniforme  $P$ .

1. Si  $d$  est un diviseur de  $n$ , on note  $D_d$  l'ensemble des multiples de  $d$  dans  $\Omega$ . Calculer  $P(D_d)$ .
2. Montrer que  $D_{p_1}, \dots, D_{p_r}$  sont mutuellement indépendants.
3. En déduire la formule pour  $\varphi(n)$ .

### Exercice 28.11 (★★★★★)

Une urne contient  $4n + 2$  boules numérotées de 1 à  $4n + 2$ . On tire  $2n + 1$  boules sans remise. Quelle est la probabilité que la somme des numéros des boules tirées soit strictement supérieure à la somme des numéros des boules restantes ?

### Exercice 28.12 (★★★★★ - Problème des chapeaux)

On considère le problème suivant :  $n$  personnes laissent leurs chapeaux au vestiaire. En repartant, chaque personne reprend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité qu'aucun ne reprenne son propre chapeau ?

1. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience aléatoire.
2. Démontrer par récurrence que pour tout  $n \geq 2$  et pour tout événement  $A_1, \dots, A_n$  :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right).$$

3. Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $A_i$  l'ensemble des permutations qui fixent  $i$ .
  - (a) Soient  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , et  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ . Déterminer le cardinal de l'ensemble  $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ .
  - (b) En déduire  $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)$ .
4. Conclusion. Quelle est approximativement la probabilité qu'aucune personnes n'ait repris son chapeau quand  $n$  est grand ?

1. Notons que cette expérience aléatoire peut être modélisée par l'univers  $\Omega = \mathfrak{S}_N$ , une issue étant une permutation des entiers de 1 à  $N$ , et par la probabilité uniforme  $P$  sur  $\Omega$ .

2. On procède par récurrence sur  $n \geq 2$ .

**I** Pour  $n = 2$ , ça résulte de la formule de cours  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**H** Soit  $n \geq 1$ . Supposons la propriété vraie au rang  $n$ .

Soient  $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$  des événements. Alors :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P\left(\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \cup A_{n+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \cap A_{n+1}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^n [A_i \cap A_{n+1}]\right) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right) \\ &= P(A_1) + \dots + P(A_n) + \sum_{k=2}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n [A_i \cap A_{n+1}]\right) &= \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P([A_{i_1} \cap A_{n+1}] \cap \dots \cap [A_{i_k} \cap A_{n+1}]) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1}) \right) \\ &= - \sum_{k=2}^{n+1} \left( (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1 \\ i_k = n+1}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) + P(A_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{k=2}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1 \\ i_k < n+1}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right) \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \left( (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1 \\ i_k = n+1}} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 \leq n+1} P(A_{i_1}) + \sum_{k=2}^{n+1} \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n+1} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right). \end{aligned}$$

D'où la propriété au rang  $k + 1$ .

On conclut par principe de récurrence.

3. (a) Pour tout  $1 \leq k \leq n$  et tout  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ ,  $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$  est l'ensemble des permutations fixant  $i_1, i_2, \dots, i_k$ , et qui permutent donc les  $n - k$  éléments  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ . Il y en a  $(n - k)!$ , et donc :

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(n - k)!}{n!}.$$

- (b) Par la formule du crible :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) \right)$$

Avec la question précédente, on obtient alors :

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \frac{(n - k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{(n - k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

4. Notons  $B_n$  l'événement : "aucune des  $n$  personnes ne reprend son propre chapeau". Alors :

$$P(B_n) = P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

On reconnaît la somme partielle d'une série exponentielle et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1}.$$

Ainsi, pour  $n$  grand,  $P(B_n) \simeq \frac{1}{e}$ .

## Formules des probabilités totales et de Bayes

### Exercice 28.13 (★)

On dispose de trois urnes contenant des boules blanches et noires :  $\mathcal{U}_1$  contient 2 boules blanches et 3 noires,  $\mathcal{U}_2$  contient 4 blanches et 2 noires,  $\mathcal{U}_3$  contient 6 blanches et 1 noire.

1. On choisit une urne au hasard et on tire une boule.
  - (a) Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?
  - (b) On tire une boule blanche. Quelle est la probabilité que le tirage se soit effectué dans  $\mathcal{U}_1$  ?
2. On effectue à présent trois tirages successifs selon le protocole suivant :
  - on tire une boule dans  $\mathcal{U}_1$ , on note la couleur, on remet la boule dans  $\mathcal{U}_2$ ,
  - on tire une boule dans  $\mathcal{U}_2$ , on note la couleur, on remet la boule dans  $\mathcal{U}_3$ ,
  - on tire une boule dans  $\mathcal{U}_3$  et on note la couleur.

Déterminer la probabilité que les trois boules tirées soient de la même couleur.

**Exercice 28.14 (★★)**

Deux bourses  $U$  et  $V$  contiennent respectivement deux pièces d'or et trois d'argent, quatre d'or et une d'argent. On tire une pièce de l'une des bourses choisie au hasard et on la remet dans cette même bourse. Si la pièce tirée est en or, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans la même bourse. Dans le cas contraire, on recommence le tirage (toujours avec remise) dans l'autre bourse. On applique cette règle à chaque tirage à partir du deuxième tirage.

1. Déterminer les probabilités pour que :
  - (a) les trois premiers tirages soient faits dans la bourse  $U$  ;
  - (b) le deuxième tirage se fasse dans la bourse  $U$  ;
  - (c) on tire une pièce d'argent au deuxième tirage ;
  - (d) le deuxième tirage se fasse dans la bourse  $U$  sachant qu'on a tiré une pièce d'or à ce deuxième tirage.
2. Soit  $n$  un entier naturel et non nul. On note  $u_n$  la probabilité de l'événement  $U_n$  : « le  $n$ -ième tirage s'effectue dans la bourse  $U$  ».
  - (a) Déterminer une relation entre  $u_{n+1}$  et  $u_n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) Calculer la probabilité d'obtenir de l'or au tirage numéro  $n$ .

**Exercice 28.15 (★★)**

Une puce se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle  $ABC$  de la façon suivante : si à l'instant  $n$  elle est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant  $n + 1$ , soit elle y reste avec une probabilité de  $2/3$ , soit elle saute sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité pour chacun de ces deux sommets. Initialement (c'est-à-dire à l'instant 0), la puce se trouve en  $A$ .

On définit, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  les événements  $A_n$  (resp.  $B_n, C_n$ ) « la puce se trouve en  $A$  (resp. en  $B$ , en  $C$ ) à l'instant  $n$  », et les probabilités  $a_n = P(A_n)$ ,  $b_n = P(B_n)$  et  $c_n = P(C_n)$ .

1. Exprimer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$ .

En déduire une matrice  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telle que 
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

2. En remarquant que  $6M - 3I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , calculer  $M^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
3. En déduire une expression de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

**Exercice 28.16 (★★)**

On dispose de  $n + 1$  urnes  $U_0, U_1, \dots, U_n$ , qui contiennent chacune  $n$  boules : l'urne  $U_k$  contient  $k$  boules bleues et  $n - k$  boules rouges. On choisit une urne au hasard (et de manière équiprobable), et on tire simultanément deux boules dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité que les deux boules soient bleues ?
2. On a tiré deux boules, et les deux sont bleues. Quelle est la probabilité que le tirage ait eu lieu dans l'urne  $U_k$  ?

**Exercice 28.17 (★★ - Le concierge alcoolique)**

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau, dont une seule ouvre la porte devant laquelle il se trouve. On note  $A_k$  l'événement « la  $k$ -ème clé essayée par le concierge est la première à ouvrir la porte ».

1. Le concierge essaie les clés sans remise, calculer  $P(A_k)$  pour  $1 \leq k \leq 10$ .
2. Le concierge essaie les clés avec remise, calculer  $P(A_k)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
3. Le concierge est ivre un jour sur trois. Lorsque c'est le cas, il essaie les clés avec remise, et les autres jours, il les essaie sans remise. Calculer  $P(A_k)$ .
4. Aujourd'hui, il a fallu 6 essais au concierge pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ? Même question avec 11 essais.

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $B_k$  l'événement "la  $k$ -ième clé n'ouvre pas la porte".

1. Comme  $A_k = \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}$ , on a par la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} P(A_k) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) \dots P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1})P_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\overline{B_k}) \\ &= \frac{9}{10} \frac{8}{9} \dots \frac{9 - (k-2)}{10 - (k-2)} \frac{1}{10 - (k-1)} \\ &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

2. On a toujours  $A_k = \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap \overline{B_k}$ , mais ici les événements sont indépendants,

$$P(A_k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(B_i) \times P(\overline{B_k}) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10} = \frac{9^{k-1}}{10^k}.$$

3. Notons  $I$  l'événement "le concierge est ivre", de sorte que  $P(I) = \frac{1}{3}$ .

Alors  $\{I, \overline{I}\}$  est un système complet d'événements, donc par la formule des probabilités totales,

$$P(A_k) = P(I)P_I(A_k) + P(\overline{I})P_{\overline{I}}(A_k).$$

Ces probabilités conditionnelles ont été calculées aux questions précédentes :

$$P_I(A_k) = \frac{9^{k-1}}{10^k} \quad \text{et} \quad P_{\overline{I}}(A_k) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{si } 1 \leq k \leq 10, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Finalement,

$$P(A_k) = \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \frac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si } 1 \leq k \leq 10, \\ \frac{1}{3} \frac{9^{k-1}}{10^k} & \text{si } k \geq 11. \end{cases}$$

4. Avec la formule de Bayes et la question précédente,

$$P_{A_6}(I) = \frac{P_I(A_6)P(I)}{P(A_6)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{9^5}{10^6}}{\frac{2}{3} \frac{1}{10} + \frac{1}{3} \frac{9^5}{10^6}} = \frac{9^5}{9^5 + 2 \times 10^5} \simeq 0.227.$$

Toujours avec le même raisonnement,

$$P_{A_{11}}(I) = \frac{P_I(A_{11})P(I)}{P(A_{11})} = \frac{\frac{1}{3} \frac{9^{10}}{10^{11}}}{\frac{1}{3} \frac{9^{10}}{10^{11}}} = 1.$$

Ceci n'est pas surprenant : si le concierge a eu besoin de strictement plus de 10 essais, c'est qu'il est ivre (car les tirages sont nécessairement avec remise).

### Exercice 28.18 (★★ - Banque CCINP)

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut  $\frac{1}{2}$ .

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé  $n$  fois et on obtient  $n$  fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité  $p_n$  que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Interpréter ce résultat.

### Exercice 28.19 (★★★)

On dispose de  $n$  urnes  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , et on dispose 3 boules dans chaque urne.

Dans l'ensemble des  $3n$  boules, une seule est bleue, les autres sont rouges.

Sachant que l'on a tiré sans remise deux boules rouges dans l'urne  $U_1$ , quelle est la probabilité que la boule bleue se trouve dans l'urne  $U_2$  ?

Notons  $B_i$  l'événement "la boule bleue est dans l'urne  $U_i$ ".

Notons  $R_1$  (resp.  $R_2$ ) l'événement "la première (resp. deuxième) boule tirée dans l'urne  $U_1$  est rouge".

La probabilité demandée est alors  $P_{R_1 \cap R_2}(B_2)$ .

Avec la formule de Bayes,

$$P_{R_1 \cap R_2}(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(R_1 \cap R_2)}{P(R_1 \cap R_2)}.$$

Mais, sachant que la boule bleue est dans l'urne  $U_2$ , l'urne  $U_1$  ne contient que des boules rouges, et donc  $P_{B_2}(R_1 \cap R_2) = 1$ .

D'autre part,  $P(B_2) = \frac{1}{n}$ , puisque la boule bleue a autant de chances de se trouver dans chaque urne.

Reste donc à calculer  $P(R_1 \cap R_2)$ . Pour cela, on applique la formule des probabilités totales au système complet  $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2) &= \sum_{i=1}^n P(B_i)P_{B_i}(R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_{B_i}(R_1 \cap R_2) \\ &= \frac{1}{n} (P_{B_1}(R_1 \cap R_2) + n - 1). \end{aligned}$$

Or, avec la formule des probabilités conditionnelles et des probabilités composées,

$$\begin{aligned}P_{B_1}(R_1 \cap R_2) &= \frac{P(B_1 \cap R_1 \cap R_2)}{P(B_1)} \\&= \frac{P(B_1)P_{B_1}(R_1)P_{B_1 \cap R_1}(R_2)}{P(B_1)} \\&= P_{B_1}(R_1)P_{B_1 \cap R_1}(R_2) \\&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\&= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{3} + n - 1 \right) = \frac{3n - 2}{3n},$$

et donc

$$P_{R_1 \cap R_2}(B_2) = \frac{1}{n} \times \frac{3n}{3n - 2} = \frac{3}{3n - 2}.$$

---