

## Variables aléatoires finies

### Loi d'une variable aléatoire

#### Exercice 30.1 (★)

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi  $\mathcal{B}(n, p)$ . Déterminer la loi de  $Y = n - X$ .

---

#### Exercice 30.2 (★★)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Une urne contient  $n$  boules dont une seule boule blanche. On effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Montrer que  $X$  suit une loi uniforme.

---

#### Exercice 30.3 (★★)

1. Un (excellent) biathlète affiche 90% de réussite au tir. Une course comporte 20 tirs, et une saison comporte 18 courses à 20 tirs. On note  $X$  le nombre de 20/20 réalisés par le biathlète au cours d'une saison. Déterminer la loi de  $X$ .
  2. Notre biathlète passe 10 ans sur le circuit mondial, et on note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de saisons où il a réalisé au moins un 20/20. Déterminer la loi de  $Y$ .
- 

#### Exercice 30.4 (★★★ - Urne de Polya)

Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On répète indéfiniment l'expérience suivante : on tire une boule, on la remet dans l'urne, et on ajoute une autre boule de la même couleur. Ainsi, à l'issue de la  $k^{\text{ème}}$  répétition de l'expérience, l'urne contient  $k + 2$  boules.

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du  $k^{\text{ème}}$  tirage.

Montrer par récurrence sur  $k$  que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_k$  suit la loi uniforme sur  $\llbracket 1, k + 1 \rrbracket$ .

---

#### Exercice 30.5 (★★★★)

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire avec remise des boules dans cette urne jusqu'à ce qu'une boule ait été tirée deux fois. On note alors  $T$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages qui ont été nécessaires.

1. Proposer un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  modélisant cette expérience et déterminer  $T(\Omega)$ .
  2. Calculer  $P(T = 2)$ .
  3. Soit  $k \in T(\Omega)$ . Exprimer  $P_{[T > k-1]}(T > k)$ .
  4. En déduire  $P(T = k)$  pour tout  $k \in T(\Omega)$ .
-

## Moments d'une variable aléatoire

### Exercice 30.6 (★★)

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire au hasard une boule, on retire de l'urne toutes les boules qui portent un numéro strictement supérieur, et on remet la boule tirée dans l'urne. On effectue alors un second tirage et on note  $Y$  le numéro de la boule obtenue.

Déterminer la loi et l'espérance de  $Y$ .

### Exercice 30.7 (★★ - Loi triangulaire)

Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1, 2n - 1 \rrbracket$  telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X = i) = \lambda i, \quad \forall i \in \llbracket n + 1, 2n - 1 \rrbracket, P(X = i) = \lambda(2n - i)$$

où  $\lambda$  est un réel fixé.

1. À quelle condition sur  $\lambda$  définit-on ainsi la loi d'une variable aléatoire ?
2. Prouver alors que  $X$  et  $2n - X$  ont même loi. En déduire  $E(X)$ .
3. Calculer  $V(X)$ .

### Exercice 30.8 (★)

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ . Calculer  $E(Y)$  dans les cas suivants :

$$(i) Y = \frac{1}{1 + X} ; \quad \left| \quad (ii) Y = \frac{\alpha^X}{2^n} \text{ où } \alpha > 0.$$

### Exercice 30.9 (★★)

Le jour 0, une action vaut 1. On suppose que chaque jour, la valeur de l'action est multipliée par  $\alpha > 1$  avec probabilité  $p \in ]0, 1[$  ou par  $\beta \in ]0, 1[$  avec probabilité  $q = 1 - p$ . On suppose que ces variations journalières sont indépendantes. Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $X_n$  le nombre de jours entre 1 et  $n$  où l'action monte, et  $S_n$  la valeur de l'action le jour  $n$ .

1. Quelle est la loi de  $X_n$  ?
2. Exprimer  $S_n$  en fonction de  $X_n$ . En déduire l'espérance et la variance de  $S_n$ .

### Exercice 30.10 (★★)

Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On tire simultanément deux boules, on note  $X$  le plus grand des deux numéros et  $Y$  le plus petit.

1. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$ .
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .
3. Montrer que les variables aléatoires  $Y$  et  $n + 1 - X$  ont même loi. En déduire  $E(Y)$  et  $V(Y)$ .

### Exercice 30.11 (★★)

Une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On tire au hasard une poignée de jetons dans cette urne, toutes les poignées (y compris la poignée vide) étant équiprobables, et on note  $X$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des jetons tirés. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note  $A_i$  l'événement « le jeton  $i$  est dans la poignée tirée » et  $Y_i = \mathbb{1}_{A_i}$ .

1. Combien y a-t-il de poignées possibles ? Combien réalisent l'événement  $A_i$  ? En déduire la loi de  $Y_i$ .
2. Exprimer  $X$  en fonction des  $Y_i$ , et en déduire  $E(X)$ .

### Exercice 30.12 (★★)

1. Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que  $E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k)$ .

2. **Application.** Une urne contient  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ , que l'on tire successivement et sans remise. On note alors  $X_i$  la variable aléatoire égale au numéro de la  $i^{\text{ème}}$  boule tirée, et on note  $X$  la variable aléatoire égale au plus grand entier  $k$  tel que  $X_1 < X_2 < \dots < X_k$ .

Déterminer les valeurs de  $P(X \geq k)$ . En déduire  $E(X)$ .

1. Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(Z \geq k) = \sum_{i=k}^n P(X = i)$ . Et donc :

$$\sum_{k=1}^n P(Z \geq k) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n P(X = i) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i P(X = i) = \sum_{i=1}^n iP(X = i) = E(X).$$

2. Il y a en tout  $n!$  manières de vider l'urne, toutes équiprobables.

Parmi celles-ci, il y en a  $\binom{n}{k} \times (n-k)!$  qui réalisent  $(X \geq k)$ . En effet, il suffit de choisir quels sont les numéros des  $k$  premières boules, il n'y aura alors qu'une seule manière de les ordonner, les  $n-k$  boules suivantes pouvant être tirées dans n'importe quel ordre. Donc

$$P(X \geq k) = \frac{\binom{n}{k} \times (n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}.$$

Il vient donc, par la formule de la question 1 :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n P(X \geq k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

### Exercice 30.13 (★★ - Fonction génératrice - 📎)

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ . On appelle *fonction génératrice de  $X$*  la fonction polynômiale  $G_X$  définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^n P(X = k) t^k.$$

1. Déterminer la fonction génératrice de  $X$  lorsque  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  ( $p \in ]0, 1[$ ) puis  $X \sim \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$ .
2. Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_X(t) = E(t^X)$ .
3. Montrer que  $E(X) = G'_X(1)$  et  $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$ .
4. Montrer que la donnée de la fonction génératrice  $G$  de  $X$  caractérise la loi de  $X$ .

**Exercice 30.14 (★★★)**

On effectue une succession de lancers d'une pièce équilibrée. À chaque lancer à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.

Pour  $n \geq 2$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issue de  $n$  lancers.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de  $X_2$  et de  $X_3$ .
2. Quel est l'ensemble des valeurs prises par  $X_n$  ? Déterminer  $P(X_n = 0)$  et  $P(X_n = n - 1)$ .
3. Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Montrer que :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k - 1).$$

4. On note  $G_n$  la fonction génératrice de la variable  $X_n$ .

- (a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $G_{n+1}(t) = \frac{(1+t)}{2}G_n(t)$ .
- (b) En déduire une expression de  $G_n(t)$  en fonction de  $n$  et de  $s$ .
- (c) Calculer alors l'espérance et la variance de  $X_n$ .

**Exercice 30.15 (★★★ - Banque CCINP)**

Un téléconseiller effectue  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  correspondants distincts. On admet que les appels constituent  $n$  expériences indépendantes, et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant est égale à  $p \in ]0, 1[$ .

Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de  $X$ .
2. Le téléconseiller rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des  $n - X$  correspondants qu'il n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note  $Y$  la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels.
  - (a) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Déterminer, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P_{[X=i]}(Y = k)$ .
  - (b) Prouver que  $Z = X + Y$  suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
  - (c) Déterminer alors l'espérance et la variance de  $Z$ , ainsi que  $E(Y)$ .

1. On effectue  $n$  épreuves de Bernoulli indépendantes car on fait  $n$  appels téléphoniques vers  $n$  correspondants qui ont chacun la probabilité  $p$  de répondre.  $X$  compte le nombre de succès au cours de ces  $n$  épreuves. Donc  $X$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(n, p)$ .

2. (a) Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Sachant que  $(X = i)$ , le téléconseiller rappelle les  $n - i$  correspondants qui n'ont pas encore répondu. Chaque correspondant a encore  $p$  chance de répondre et les épreuves sont indépendantes. Donc  $Y$  suit alors une loi binomiale  $\mathcal{B}(n - i, p)$ .

Ainsi,

$$P_{(X=i)}(Y = k) = \begin{cases} \binom{n-i}{k} p^k q^{(n-i)-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n - i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

en notant  $q = 1 - p$ .

(b)  $Z$  est le nombre total de correspondants qui ont décroché au cours des deux séries d'appels. Donc  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Soit  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . A l'aide du système complet d'événements  $(X = i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  :

$$\begin{aligned}
 P(Z = k) &= \sum_{i=0}^n P(X = i)P_{(X=i)}(Z = k) \\
 &= \sum_{i=0}^n P(X = i)P_{(X=i)}(Y = k - i) \\
 &= \sum_{i=0}^k P(X = i)P_{(X=i)}(Y = k - i) + \underbrace{\sum_{i=k+1}^n P(X = i)P_{(X=i)}(Y = k - i)}_{=0 \text{ car } k - i < 0} \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{n-i}{k-i} p^{k-i} q^{(n-i)-(k-i)} \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} p^k q^{2n-k-i} \\
 &= p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} \frac{1}{q^i}.
 \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} &= \frac{n!}{i!} \times \frac{(n-i)!}{(k-i)!((n-i)-(k-i))!} \\
 &= \frac{n!}{i!(k-i)!(n-k)!} \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{i!(k-i)!} \\
 &= \binom{n}{k} \binom{k}{i}.
 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
 P(Z = k) &= p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} \frac{1}{q^i} = p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{i} \frac{1}{q^i} \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{1}{q^i} = \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{q}\right)^i 1^{k-i} \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \left(\frac{1}{q} + 1\right)^k = \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \left(\frac{1+q}{q}\right)^k \\
 &= \binom{n}{k} p^k q^{2n-k} \frac{(1+q)^k}{q^k} = \binom{n}{k} [p(1+q)]^k (q^2)^{n-k}.
 \end{aligned}$$

Comme  $p(1+q) = p + pq = p + (1-q)q = p + q - q^2 = 1 - q^2$ , on obtient :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad P(Z = k) = \binom{n}{k} (1 - q^2)^k (q^2)^{n-k}.$$

On remarque que  $Z$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(1 - q^2, n)$ .

(c) Comme  $Z$  suit une loi binomiale  $\mathcal{B}(1 - q^2, n)$ ,

$$E(Z) = n(1 - q^2) \text{ et } V(Z) = n(1 - q^2)q^2.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$E(Y) = E(Z - X) = E(Z) - E(X) = n(1 - q^2) - np = nq(1 - q).$$

### Exercice 30.16 (★★★)

Un téléphone contient  $n \geq 2$  chansons, et fonctionne en mode aléatoire en choisissant à la fin de chaque chanson une nouvelle chanson parmi les  $n$ , s'autorisant ainsi à lire plusieurs fois de suite la même chanson. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $X_k$  le nombre de chansons différentes qui ont été jouées au moins une fois parmi les  $k$  premières chansons.

1. Déterminer  $X_k(\Omega)$ .
2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $P(X_k = 1)$  et  $P(X_k = k)$ .
3. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , prouver que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n}P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n}P(X_k = i-1).$$

4. Donner alors une relation entre  $E(X_{k+1})$  et  $E(X_k)$ , puis l'expression de  $E(X_k)$  en fonction de  $k$  et  $n$ .

1. Dans le pire des cas, une chanson a été jouée, et donc  $X_k = 1$ , et au mieux,  $k$  chansons distinctes ont été jouées, sauf si  $k > n$ , auquel cas au maximum  $n$  chansons auront été jouées.

$$\text{Donc } X_k(\Omega) = \llbracket 1, \min(n, k) \rrbracket.$$

2. Pour que  $X_k$  soit égal à 1, il faut que la même chanson ait été jouée en boucle, c'est-à-dire qu'à chacune des étapes, la même chanson ait été choisie. Donc :

$$P(X_k = 1) = n \left( \frac{1}{n} \right)^k = \frac{1}{n^{k-1}}.$$

Si  $k > n$ , alors  $(X_k = k) = \emptyset$ , et donc  $P(X_k = k) = 0$ .

Si  $k \leq n$ , alors il y a  $n^k$  façons de jouer  $k$  chansons à la suite. Et pour choisir une playlist formée de chansons différentes, il faut choisir ces chansons (il y en a  $\binom{n}{k}$ ), puis l'ordre dans lequel on les joue (il y a  $k$  choix). Donc

$$P(X_k = k) = \frac{\binom{n}{k}k!}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

3. Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Avec la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements  $(X_k = j)_{1 \leq j \leq \min(k, n)}$ , il vient

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= \sum_{j=1}^{\min(k, n)} P(X_k = j)P_{(X_k=j)}(X_{k+1} = i) \\ &= P(X_k = i)P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) + P(X_k = i-1)P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i). \end{aligned}$$

Or  $P_{(X_k=i)}(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n}$  car la  $(k+1)$ -ième chanson figure parmi les  $i$  déjà jouées. Et  $P_{(X_k=i-1)}(X_{k+1} = i) = \frac{n-i}{n}$  car la  $(k+1)$ -ième chanson figure parmi les  $n-i+1$  qui

n'ont pas encore été jouées. Donc :

$$P(X_{k+1} = i) = \frac{i}{n}P(X_k = i) + \frac{n-i+1}{n}P(X_k = i-1).$$

Remarquons que le cas  $i = 1$  s'inclut dans la formule obtenue car  $P(X_k = 0) = 0$ .

4. En multipliant par  $i$  la relation précédente, puis en sommant les relations ainsi obtenues pour  $i$  allant de 1 à  $n$  :

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^n iP(X_{k+1} = i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i(n-i+1)P(X_k = i-1) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i^2 P(X_k = i) + \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)(n-j)P(X_k = j) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i^2 - (n-1)i - i^2 + n)P(X_k = i) \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n iP(X_k = i) + \sum_{i=1}^n P(X_k = i) \\ &= \frac{n-1}{n} E(X_k) + 1. \end{aligned}$$

La suite  $(E(X_k))_k$  est donc une suite arithmético-géométrique. Après calculs, on obtient

$$E(X_k) = n \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^k \right).$$

### Exercice 30.17 (★★★★ - Une loi finie est caractérisée par ses moments)

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires à valeurs dans  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ .

Montrer que  $X$  et  $Y$  ont même loi si, et seulement si, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E(X^k) = E(Y^k)$ .

Il y a seulement l'implication réciproque à prouver, l'implication directe étant évidente.

Donnons nous  $(a_1, \dots, a_n)$  des réels et prouvons qu'il existe au plus une loi de variable aléatoire  $X$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $E(X^k) = a_k$ .

Par le théorème de transfert, cela revient à demander que les  $P(X = x_k)$  soient solution de

$$\begin{cases} x_0 P(X = x_0) + x_1 P(X = x_1) + \dots + x_n P(X = x_n) &= a_1 \\ x_0^2 P(X = x_0) + x_1^2 P(X = x_1) + \dots + x_n^2 P(X = x_n) &= a_1 \\ &\vdots \\ x_0^n P(X = x_0) + x_1^n P(X = x_1) + \dots + x_n^n P(X = x_n) &= a_1 \end{cases}$$

Avec la contrainte supplémentaire que  $P(X = x_0) + P(X = x_1) + \dots + P(X = x_n) = 1$ , on en déduit que  $(P(X = x_0), P(X = x_1), \dots, P(X = x_n))$  sont solution d'un système dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

C'est une matrice de Vandermonde, inversible si et seulement si  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  sont tous distincts (ce qui est le cas ici). Il y a donc unicité d'une solution  $(P(X = x_0), P(X = x_1), \dots, P(X = x_n))$  au système, ce qui prouve le résultat demandé.

---

**Exercice 30.18 (★★★★)**

Soit  $X$  une variable aléatoire telle que  $E(X) = \alpha$  et  $E(X^2) = E(X^4) = 1$ .

Montrer que  $\alpha \in [-1, 1]$ , puis déterminer la loi de  $X$ .

---